Bewijzen

1 Inleiding

- De geschiedenis van 'Bewijs dat ...' begint, net als een sprookje, vele, vele jaren geleden met 'Er was eens...'. Er was inderdaad eens een tijd waarin geen bewijzen bestonden nl, tijdens de Babylonische periode, want in de Babylonische wiskunde - 4000 jaar geleden - was er geen spoor te vinden van het begrip bewijs, noch van enige deductieve redenering.
Babylonische wiskunde, zoals ook deze tijdens de Egyptische farao's, bestond uit recepten om een concreet probleem met concrete gegevens op te lossen. Het was een wiskunde zonder bewijzen, zonder verklaringen! Toch bleek na verloop van tijd ergens de noodzaak voor meer structuur omdat elk gelijkaardig probleem telkens moest worden hernomen volgens het gegeven recept.

- Volgend op deze Babylonische-Egyptische periode kwam dan de intellectuele dominantie van de Griekse beschaving waar deductief denken essentieel was. Het begon min of meer gestructureerd rond ongeveer 550 A.D. wanneer de school van Pythagoras aan wiskunde ging doen. Pythagoras en de mathematikoi waren niet zo geïnteresseerd in het oplossen van problemen, maar wel in de principes waarop wiskunde gebaseerd was, op de begrippen getal, driehoek, ruimtelijke vorm en op de abstracte betekenis van bewijs. De Pythagoreeërs waren aldus - historisch gezien - de eersten om meetkundige observaties en beschouwingen een wetenschappelijke omkadering te geven en ze waren de eersten die de noodzaak onderkenden voor een systematisch bewijs. De volle ontplooiing hiervan manifesteerde zich twee eeuwen later met de Elementen van Euclides.
Zo is het begrip bewijs dan ook één van de meest invloedrijke erfgoederen geworden die het oude Griekenland ons heeft nagelaten.

- Opmerkelijk hierbij is het feit dat het precies in de wiskunde is waar men de behoefte - zelfs de noodzaak - voelt om elke uitspraak te bewijzen. Dit staat haaks op de situatie in andere wetenschappen zoals fysica, biologie, aardrijkskunde, ... waar men hypotheses formuleert aan de hand van observaties en experimenten en deze als waar aanvaardt tot zolang geen andere elementen een wijziging of een afwijzing noodzakelijk maken.

2 Bewijs dat $\cdots$

- 'Bewijs dat... ' is een uitdrukking die vrij vlot en vrij veel wordt gebruikt, maar wat betekent deze in wiskunde?
  Een bewijs van een wiskundige stelling is een reeks van stappen die leidt tot het gewenste besluit.

- Bewijsmethoden gebruiken de regels van de wiskunde logica, maar in de uitvoeringsprocedures gebruikt men dikwijls ook een zekere vorm van natuurlijke, gewone taal. Men onderscheidt daarom enerzijds de strikt formele bewijzen die enkel de wetten en notaties van de logica erkennen en gebruiken en anderzijds de zogenaamde sociale bewijzen (kortweg bewijzen genoemd) die én logica én gewone taal gebruiken.

- 'Bewijs dat ... ' kan algemeen worden benaderd op twee manieren en zo onderscheidt men *constructieve* en *niet-constructieve* bewijzen. Een constructief bewijs is een bewijsmethode die het bestaan aantoont van een wiskundig object met bepaalde eigenschappen door zulk een object te creëren of een methode aan te geven hoe dit object kan worden gecreëerd. Een niet-constructief (of existentie) bewijs is een bewijsmethode die enkel het bestaan aantoont van een wiskundig object met bepaalde eigenschappen.
  Als men vraag om te bewijzen dat er een reëel getal x bestaat waarvoor $x^4 = x + 2$ kan men die x proberen te berekenen via allerlei rekenregels (constructief bewijs) ofwel kan men, zonder de x te kennen, bewijzen dat x moet bestaan (niet-constructief bewijs)

- 'Bewijs dat...' is een uitdrukking die , naast het expliciet vragen naar een bewijs, ook andere vormen van vraagstelling inhoudt. Het gaat dan over het leveren van rechtvaardigingen van resultaten. Zo bijvoorbeeld in volgende vraagstellingen : Is deze uitspraak waar of onwaar? Bereken..., Los op ..., Construeer...

3 Klassieke bewijstechnieken

Dit zijn technieken die, in onderwijs en onderzoek en binnen alle onderdelen van de wiskunde, sommige reeds jarenlang of zelfs eeuwenlang, werden en worden gebruikt.
We beschouwen enerzijds vijf rechtstreekse technieken nl. Het direct bewijs, Het bewijs door inductie, Het duivenhok principe, Het bewijs door uitputting, Het Descartes principe en anderzijds twee onrechtstreekse technieken met name Het bewijs uit het ongerijmde (contradictie) en Het bewijs door een tegenvoorbeeld.

1. Direct bewijs

   Hier wordt het besluit geformuleerd door middel van een logische combinatie van axioma's, definities en vroeger bewezen resultaten. Een logische combinatie betekent het toepassen van de regels van de logica en hier wordt naast wiskundige taal ook natuurlijke taal gebruikt.

2. Bewijs door inductie

   Inductie is eigenlijk een verzameling van bewijstechnieken die de waarheid van een stelling voor alle elementen van een verzameling aantonen door gebruik te maken van de onderliggende structuur van de verzameling. Bewijs door inductie is vooral nuttig om eigenschappen te bewijzen voor oneindig grote verzamelingen, bijvoorbeeld $\mathbb{N}$. Om de geldigheid te bewijzen van een uitspraak van de vorm "Voor ieder natuurlijk getal n geldt $P(n)$", waarbij $P(n)$ staat voor een bewering (propositie) waarin n voorkomt, maakt men vaak gebruik van deze methode :

   (a) Basisstap: Men bewijst $P(1)$.
   (b) Inductiehypothese: Men bewijst dat als $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ gelden, dan ook $P(k+1)$ geldt.

   Het is vrijwel onmogelijk te zeggen wie als eerste het principe van inductie heeft geformuleerd maar de oude Grieken moeten er toch enig idee over gehad hebben. De bekende wiskundige Freudenthal geeft de eer aan Blaise Pascal . Een paar voorbeelden :

   Voorbeeld 1. *Voor elk natuurlijk getal n geldt :*

   $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Bewijs : De geldigheid van de formule voor $n = 1$ is duidelijk, want $1^2 = \frac{1}{6}.1.(1{+}1)(2{+}1)$. Stel dat de formule ook geldt voor alle $n \leq k$.Dan volgt: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k{+}1)(2k{+}1){+}(k{+}1)^2 = \frac{1}{6}(k{+}1)(2k^2{+}7k{+}6) = \frac{1}{6}(k{+}1)(k{+}2)(k{+}3)$ *en dit is precies de formule voor $n = k + 1$.*

Voorbeeld 2. *Bewijs dat elk natuurlijk getal groter dan 1 kan worden geschreven als een product van priemgetallen (priemontbinding).*
Bewijs: 2 is een priemgetal en is zijn eigen priemontbinding.(basisstap)
Als elke m die voldoet aan $2 \leq m \leq k$ een priemontbinding heeft, dan heeft ook $k + 1$ een priemontbinding.(inductiehypothese)
Het bewijs gaat als volgt: Als $k + 1$ een priemgetal is , is het zijn eigen priemontbinding. Als $k + 1$ niet priem is, dan is $k + 1 = mn$ met $2 \leq m, n \leq k$ maar wegens de inductiehypothese hebben m en n een priemontbinding. Dit betekent dat $k + 1$ een priemontbinding heeft.

3. Het Descartes principe

Dit is niets anders dan de bewijstechniek van de analytische meetkunde waarbij meetkundige gegevens worden omgezet in algebraïsche via een stelsel cordinaten. Het is een ideale bewijstechniek voor het bepalen van meetkundige plaatsen. Een nadeel van deze techniek is het gevaar een niet geschikt assenkruis te kiezen waardoor men soms in ingewikkelde berekeningen kan verzeild raken.

4. Bewijs door uitputting

Men spreekt soms ook van bewijs door *exhaustie* (van het Latijnse werkwoord exhaurire hetgeen uitputten, uitscheppen betekent) of ook van *case analyse* (gevallenonderzoek). In deze bewijstechniek wordt de te bewijzen uitspraak opgedeeld in een eindig aantal deeluitspraken en daarna wordt elke deeluitspraak bewezen. Er zijn dus twee essentiële onderdelen: een bewijs dat het geheel van alle deeluitspraken (alle mogelijke gevallen) precies de te bewijzen uitspraak omvat en een bewijs van elke deeluitspraak.

Voorbeeld 3. *Bewijs dat elke derdemacht van een natuurlijk getal ofwel een 9-voud, ofwel een 9-voud + 1, ofwel een 9-voud -1 is.*
Er zijn 3 deelgevallen : Een natuurlijk getal n is een 3-voud, een 3-voud + 1 of een 3-voud + 2 (= 3-voud -1).

(a) $n = 3k (k \in \mathbb{N})$ *dan is* $n^3 = (3k)^3 = 27k^3$. *Dus* n^3 *is een 9-voud.*

(b) $n = 3k+1 (k \in \mathbb{N})$ *dan is* $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 3(3k)^2 + 3(3k) + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$ *en dus is* n^3 *een 9-voud + 1.*

(c) $n = 3k+2 (k \in \mathbb{N})$. *Dan is* $n = 3k-1 (k \in \mathbb{N})$ *en* $n^3 = (3k-1)^3 = 27k^3 - 3(3k)^2 + 3(3k) - 1 = 9(3k^3 - 3k^2 + k) - 1$ *en dus is* n^3 *een 9-voud - 1.*

5. Bewijs uit het ongerijmde (Contradictie)

   Ook hier wordt soms de Latijnse benaming reductio ad absurdum vermeld hetgeen aantoont dat deze - en ook andere bewijstechnieken - reeds in de Oudheid gekende vormen van redenering waren. Ook de uitdrukking bewijs door contradictie wordt gebruikt. Zulk een bewijs gaat uit van het tegengestelde van de uitspraak die men wil aantonen. Men onderstelt dus dat de 'tegengestelde uitspraak' waar is en men komt dan door het toepassen van logische argumenten tot een absurd resultaat.
   Stel dat men wil bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Deze stelling werd reeds vele malen bewezen maar waarschijnlijk het oudste en meest ingenieuze bewijs is te vinden in het negende boek van de Elementen van Euc1ides en gebruikt deze bewijstechniek.

   Voorbeeld 4. *Er zijn oneindig veel priemgetallen.*
   Het steunt op volgende observaties (logische argumenten) : getallen die een 3-voud + 1 zijn, zijn niet deelbaar door 3 ; getallen die een 5-voud + 1 zijn, zijn niet deelbaar door 5 ; getallen die een 7 -voud + 1 zijn, zijn niet deelbaar door 7 ; getallen die een p-voud + 1 zijn, zijn niet deelbaar door p. Onderstel nu dat het aantal priemgetallen eindig is en dat p het grootste is. Noem N het getal gevormd door het product van alle priemgetallen (beginnend met 2 en eindigend met p) vermeerderd met 1 :$N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \cdots \times p) + 1$. *Het getal N is nu ofwel een priemgetal ofwel geen priemgetal. N kan geen priemgetal zijn omdat p het grootste is en* $N > p$. *N kan dan worden ontbonden in zijn priemfactoren, maar omdat N niet deelbaar is door 2,3, ..., p (zie observaties hierboven), zijn de priemfactoren groter dan p. Dan zou er dus een priemgetal bestaan dat groter is dan p en we hebben een tegenspraak.*

6. Bewijs door een tegenvoorbeeld

   In deze bewijstechniek gaat men met één concreet tegenvoorbeeld (en één is genoeg) een te bewijzen algemene uitspraak tegenspreken.

   Voorbeeld 5. *Is elk element in de rij* $31, 331, 3331, 33331,$ $333331, 3333331, \cdots$ *een priemgetal?*
   Het antwoord is ontkennend omdat 333333331 *geen priemgetal is, want* $333333331 = 17 \times 19607843$.

7. Het duivenhok principe

   Dit principe is gekend onder verschillende andere benamingen zoals ladenprincipe en Dirichlet principe. Deze laatste benaming verwijst in feite naar de oorsprong: het is nl. de wiskundige Dirichlet die vermoedelijk als eerste in 1834 dit principe lanceerde, weliswaar onder de benaming 'Schubfachprinzip'. Hij gebruikte dit bij het benaderen van irrationale getallen door rationale . Vermits echter nog andere principes de benaming Principe van Dirichlet dragen is het veiliger te spreken van het duivenhok principe. In de eenvoudigste vorm is de formulering zeer kleurrijk: Als men in n hokken m duiven wil plaatsen met $m > n$ dan is er minstens één hok waarin meer dan één duif zit. Dit merkwaardig en eenvoudig principe is in staat om heel wat problemen op te lossen.

   Voorbeeld 6. *Als in het binnengebied van een gelijkzijdige driehoek met lengte van de zijde gelijk aan 2, vijf punten gegeven zijn bewijs dan dat er steeds twee van die punten zijn waartussen de afstand ten hoogste gelijk is aan 1.*
   Bewijs : Teken in de gelijkzijdige driehoek de lijnstukken die de middens van de drie zijden twee aan twee met elkaar verbinden. Op deze wijze wordt de gelijkzijdige driehoek verdeeld in vier kleinere gelijkzijdige driehoeken met lengte van de zijde gelijk aan 1. Vermits er vijf punten in vier driehoekjes moeten worden geplaatst is er minstens één driehoekje waarin zich twee punten bevinden. Het is verder duidelijk dat de afstand tussen deze twee punten ten hoogste 1 is.

   Een veralgemening van het duivenhok principe : Als m objecten in n laden worden geplaatst met $m = k.n + r$, waarbij k en r natuurlijke getallen zijn en $0 < r < n$, dan bevat één lade ten minste $k+1$ objecten. Deze veralgemening kan worden gebruikt voor het oplossen van nieuwe problemen.

Voorbeeld 7. *In een klas zijn er 25 leerlingen die een test met drie evaluaties A , B en C afleggen. Elk van hen krijgt dus een A of een B of een C. Bewijs dat er ten minste negen leerlingen zijn die dezelfde evaluatie krijgen.*
Bewijs : Vermits $25 = 3 \times 8 + 1$ *kunnen we stellen dat er 25 objecten (leerlingen) zijn en 3 laden (evaluaties). Het veralgemeend principe stelt dat er minstens negen leerlingen zijn met dezelfde evaluatie!*

4 Speciale technieken

Hiermee bedoelen we technieken die op een bijzondere manier problemen benaderen of eigen zijn aan specifieke onderwerpen of sectoren. Men kan ze indelen in twee groepen. De eerste groep steunt op algemene principes: het Fubini principe en het even - oneven principe. De tweede groep is afgestemd op bijzondere redeneringen en omvat o.m. het bewijs via een complementair probleem, het bewijs door oneindige afdaling, de methode van de voorlopige veronderstelling, het extremum principe, bewijzen door meetkundige transformaties, overgang naar complexe getallen en vectoriële bewijzen.

1. Het Fubini principe

   Het is in wiskunde nogal gebruikelijk om sommige stellingen, eigenschappen, methodes, formules, ... te personaliseren door hieraan een naam te geven en de stelling van Pythagoras is zeker één van de meest bekende voorbeelden. Soms gebeurt het ook wel dat een veel toegepaste techniek geen eigen 'herkenningslabel' heeft ondanks de kracht en de efficiëntie ervan en dat is precies de geschiedenis van het Fubini principe. Het principe waarover het hier gaat luidt als volgt : Als men de elementen van een verzameling op twee verschillende manieren telt, dan bekomt men hetzelfde resultaat.
   Dit principe is uiterst eenvoudig en wordt - zonder dat men dit eigenlijk goed beseft - onder vele varianten gebruikt in de meest uiteenlopende gebieden van de wiskunde. Een professor aan de universiteit Van Californie, S. K.. Stein, kwam in 1979 op het idee dit principe een naam te geven nl. het Fubini principe.
   Men zou dit principe misschien ook als volgt kunnen samenvatten: Bekijk het probleem van twee kanten.

Voorbeeld 8. *De identiteit van Pascal:* $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$
Het linkerlid C_n^r *stelt het aantal deelverzamelingen met r elementen voor genomen uit een verzameling van n elementen* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
Het rechterlid bekijken we als volgt: We nemen uit de verzameling $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *een deelverzameling. In zulke deelverzameling is* x_n *een element of is er geen element van. Nu zijn er* C_{n-1}^{r-1} *deelverzamelingen met r elementen die* x_n *bevatten want de andere r -1 elementen zijn elementen van* $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$. *Verder zijn er precies* C_{n-1}^r *deelverzamelingen met r elementen die* x_n *niet bevatten want in dit geval komen alle r elementen uit* $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$. *Als we de somregel toepassen stelt de som* $C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$ *het aantal deelverzamelingen voor met r elementen genomen uit* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. *Het linkerlid en het rechterlid van de opgave stellen dus hetzelfde aantal deelverzamelingen van* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *voor.*

Voorbeeld 9. *Waaraan is 1+2+3+...+98+99+100 gelijk?*
Gauss gaf ongeveer onmiddellijk de oplossing op de volgende manier:
$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$
$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$
en dit geeft bij optelling $2S = 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101 = 100.101$ *zodat* $S = 50 \times 101 = 5050$.

Een afgeleide techniek is deze van Linkerlid = Rechterlid.
Deze bewijstechniek is reeds lang gekend in de driehoeksmeting. Als men een identiteit in driehoeksmeting wil bewijzen wordt het linkerlid omgewerkt door deductie tot een bepaalde uitdrukking en wordt het rechterlid op dezelfde wijze omgewerkt tot dezelfde uitdrukking.

2. Het even - oneven principe

   Een tweede eenvoudig principe dat in staat is om zowel zeer eenvoudige als zeer ingewikkelde problemen te behandelen is het even - oneven principe. Het steunt op één van de basiselementen van het getalbegrip : een geheel getal is even of oneven. Door aan te tonen dat de pariteit (even - oneven) niet verandert (invariant is !) kan men bepaalde besluiten treffen. In deze besluiten wordt dikwijls het argument van contradictie of tegenspraak gebruikt. Het even - oneven principe is ook in feite een bijzonder geval van het bewijs door uitputting, nl. voor de gehele getallen.

Voorbeeld 10. *Voor welke waarden van $n \in \mathbb{Z}$ is n^2+2 een viervoud?*
Als n oneven is dan is $n = 2k+1$ en dus is $n^2+2 = (2k+1)^2+2 = 4k^2+4k+3$ en dit is geen viervoud.
Als n even is , dan is $n = 2k$ en $n^2+2 = 4k^2+2$ en dit is geen viervoud.
Dus voor geen enkele waarde van n is n^2+2 een viervoud.

Voorbeeld 11. *Als de discriminant van een kwadratische vergelijking $ax^2+bx+c=0$ met gehele coefficienten gelijk is aan 23, wat is dan de aard van de wortels van deze vergelijking?*
De discriminant is b^2-4ac en daarin is $4ac$ uiteraard steeds een 4-voud.
Onderstel dat b even is, dan is b^2 een 4-voud en b^2-4ac ook. Vermits 23 geen 4-voud is kan b niet even zijn.
Onderstel dat b oneven is, dan is b^2 een 4-voud + 1 en b^2-4ac ook. Vermits 23 een 4-voud + 3 is, kan b niet oneven zijn.
Het besluit is dat zulk een discriminant nooit 23 kan zijn.

3. Bewijs via een complementair probleem

   Bij het bewijs door uitputting gaan we een probleem opdelen in een eindig aantal deelproblemen. Men kan nu ook een probleem beschouwen als een onderdeel van een 'overkoepelend' probleem en dan trachten alle andere onderdelen te behandelen zodat het gesteld probleem er automatisch door opgelost wordt.

   Voorbeeld 12. *Op hoeveel manieren kunnen ouders hun zes kinderen naast elkaar plaatsen om een foto te nemen als Albert en Lieve niet naast elkaar mogen staan?*
   Dit probleem is een onderdeel van de overkoepelende vraag op hoeveel manieren ouders hun zes kinderen zonder enige voorwaarde naast elkaar kunnen plaatsen om een foto te maken. Dit aantal is eenvoudig te bepalen nl. op 6! of 720 manieren.
   Het gegeven probleem stelt de bijkomende voorwaarde dat Albert en Lieve niet naast elkaar mogen staan.
   Het complementair probleem - t.o.v. het overkoepelend - is het probleem om te bepalen op hoeveel manieren ouders hun zes kinderen naast elkaar kunnen plaatsen met de voorwaarde dat Albert en Lieve wel naast elkaar moeten staan.
   De oplossing van het complementair probleem gaat als volgt: Beschouw Albert en Lieve als één geheel (vermits ze naast elkaar staan). Dan zijn er in feite nog vijf kinderen en deze kunnen op 5! of 120 manieren geplaatst worden.
   Als we nu opmerken dat de eenheid 'Albert-Lieve' twee mogelijkheden

inhoudt (Albert-Lieve en Lieve-Albert) dan zijn er volgens de productregel voor het complementair probleem $2 \times 120 = 240$ *mogelijkheden. Het antwoord op het oorspronkelijk probleem is dus* $720 - 240 = 480$ *mogelijkheden.*

4. Bewijs door de methode van de oneindige afdaling

   Deze methode is ook bekend onder de benaming infinite descent en werd ontworpen en gebruikt door de bekende wiskundige Fermat. Het principe van deze methode is :
   Veronderstel dat een probleem een oplossing S heeft.
   Vanuit die oplossing S wordt een niet-eindige rij van oplossingen geconstrueerd ondanks het feit dat het probleem aangeeft dat die oplossingenrij een laatste term moet hebben. Dit levert dan een tegenspraak op.

   Voorbeeld 13. *Bewijs dat de vergelijking* $x^2 - 2y^2 = 0$ *geen oplossing heeft in de verzameling van de strikt positieve gehele getallen.*
   Onderstel dat $x^2 - 2y^2 = 0$ *wel zulk een oplossing heeft en noem deze* (x_1, y_1). *We hebben dan dat* $x_1^2 - 2y_1^2 = 0$ *of* $x_1^2 = 2y_1^2$. *Hieruit volgt dat* x_1^2 *een even positief geheel getal is en dus dat* $x_1 = 2x_2$ *met* $x_2 \in \mathbb{N}$.
   Invullen geeft: $4x_2^2 = 2y_1^2$ *of* $2x_2^2 = y_1^2$. *Hieruit volgt dan weer dat* y_1 *een even positief geheel getal is en dus* $y_1 = 2y_2$ *met* $y_2 \in \mathbb{N}$.
   Terug invullen geeft dan $2x_2^2 = 4y_2^2$ *of* $x_2^2 = 2y_2^2$. *Dit betekent dan dat* (x_2, y_2) *een tweede oplossing is van de oorspronkelijke vergelijking.*
   Als we zo verder doen , construeren we een niet eindige rij $x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > x_3 > y_3 > ...$ *en dit zijn allemaal elementen van* $\mathbb{N}$.
   Maar vermits $\mathbb{N}$ *een kleinste element heeft kan de niet-eindige rij niet bestaan. Dit betekent dan weer dat er geen positieve gehele getallen zijn die oplossing zijn van* $x^2 - 2y^2 = 0$

   Deze methode is vooral geschikt om negatieve uitspraken zoals de onoplosbaarheid van een vergelijking, de onmogelijkheid van een bepaalde constructie, ... te bewijzen. In feite is het een variant op het bewijs uit het ongerijmde maar men vertrekt hier van een concreet aangeduide oplossing i.p.v. een andere (tegengestelde) uitspraak.

5. Methode van de voorlopige veronderstelling

   Deze techniek is ook nog gekend onder de engelse benaming : false position.

Voorbeeld 14. *Betaal 1000 Euro met 74 biljetten van 5 Euro en 20 Euro. Hoeveel van ieder heeft men nodig?*
Onderstel dat men 74 biljetten van 20 Euro gebruikt dan zou men $74 \times 20 = 1480$*Euro betalen en dit betekent 1480 - 1000 = 480 Euro te veel. Telkens als men nu een biljet van 20 Euro door één van 5 Euro vervangt, vermindert het uitbetaalde bedrag met 15 Euro. Als men nu het te veel betaalde bedrag, nl. 480 Euro wil elimineren zal deze verwisseling* $480 : 15 = 32$ *keer moeten gebeuren. Dit wil dus zeggen dat men 32 biljetten van 5 Euro gebruikt en 74 - 32 = 42 biljetten van 20 Euro.*

Voorbeeld 15. *Voor elk goed opgeloste vraag krijgt Lode 25 eurocent van zijn vader, maar voor elk foutief opgeloste vraag moet hij zijn vader 20 eurocent betalen. Nadat Lode 36 vragen heeft opgelost, ontvangt hij 5,40 Euro. Hoeveel vragen heeft Lode correct opgelost?*
Onderstel dat Lode alle 36 vragen correct zou hebben opgelost, dan zou hij 9 Euro hebben ontvangen, dus 3,60 Euro meer dan in werkelijkheid. Het verschil tussen een correcte en een niet correcte oplossing van een vraag is 0,25 + 0,20 = 0,45 eurocent. De fictieve meerontvangst van 3,60 Euro betekent dus dat hij 8 vragen niet correct heeft opgelost, ofwel 28 vragen correct.

6. Het extremum principe

Dit is een vrij 'verborgen' principe dat enerzijds tot zeer eenvoudige oplossingen leidt maar anderzijds zeer zelden wordt gebruikt omdat de herkenbaarheid om het toe te passen niet eenvoudig is. In welke gegeven situaties het principe kan worden toegepast is onmogelijk in regels of aanbevelingen te vatten.

Voorbeeld 16. *In het vlak kleuren we een eindig aantal punten ofwel wit , ofwel zwart. We kiezen de punten en de kleuren zo dat elk lijnstuk dat twee punten van dezelfde kleur verbindt een punt van de andere kleur bevat. Bewijs dat alle punten op ëën lijnstuk liggen.*
Onderstel dat niet alle punten op ëën lijnstuk liggen, dan moet er minstens ëën drietal zijn dat een driehoek vormt. Van alle driehoeken die men zo kan vormen, kies datgene met de kleinste oppervlakte. Noem deze driehoek ABC. Elk van die punten A, B of C is ofwel wit, ofwel zwart gekleurd. Zonder de algemeenheid te schaden , onderstel dat B en C wit gekleurd zijn. Dan moet er, volgens de gegevens, een zwart gekieurd punt D zijn tussen B en C. Maar dan is de oppervlakte van driehoek ABD kleiner dan deze van driehoek ABC , hetgeen tot een tegenspraak leidt. Dus liggen alle punten op één lijnstuk.

7. Bewijzen door meetkundige transformaties

   Specifiek bij meetkundige problemen kan het bewijs worden geleverd door dit probleem om te zetten naar een andere vorm (letterlijk) die een eenvoudiger configuratie toont en aldus gemakkelijker te behandelen is.

   Voorbeeld 17. *We beschouwen drie vaste niet collineaire punten A, B en C in het vlak. Vanuit een willekeurig punt P_0 van het vlak kruipt een mier volgens een rechte lijn door A naar een punt P_1 zo dat $|P_0A| = |AP_1|$. Daarna kruipt de mier vanuit P_1 volgens een rechte lijn door B naar P_2 zo dat $|P_1B| = |BP_2|$. Vervolgens kruipt de mier vanuit P_2 volgens een rechte lijn door C naar P_3 zo dat $|P_2C| = |CP_3|$. Dan herneemt de mier dezelfde rondgang door vanuit P_3 volgens een rechte lijn door A naar P_4 te gaan zo dat $|P_3A| = |AP_4|$, enz... . Na 2007 acties is de mier doodmoe en stopt. Waar bevindt de mier zich?*
   Het resultaat van twee opeenvolgende trajecten t.o.v. de punten A en B (het zijn puntsymmetrien) is een translatie gelijk aan $2\overrightarrow{AB}$. Na zes trajecten (puntsymmetrien t.o.v. A , B , C, A, B , C) is het resultaat $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\vec{B} - \vec{A}) + 2(\vec{A} - \vec{C}) + 2(\vec{C} - \vec{B}) = \vec{O}$ en bevindt de mier zich terug in het punt P_0. Vermits nu $2007 = 6 \times 334 + 3$ bevindt de mier zich in het punt P_3.

   Voorbeeld 18. *Een rode (B) en een witte (A) biljartbal liggen niet tegen de lange band (a). Hoe moet je de witte bal naar de lange band schieten opdat de rode bal geraakt zou worden?*
   Spiegel A t.o. v. a en bekom zo het virtueel punt A'. Verbind nu A' met B en zij S het snijpunt met a. Als je de witte bal naar S schiet zal die B raken.

8. Overgang naar complexe getallen

   Precies zoals de overgang naar een behandeling met cartesische cordinaten (het Descartes principe) kunnen bewijzen worden geleverd door over te gaan naar het complex vlak. Punten worden dan voorgesteld (gepositioneerd) door hun plaats in het complex vlak en via het rekenen met complexe getallen kunnen dan gestelde uitspraken worden bewezen.

   Voorbeeld 19. *Bereken :* $A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$
   Stel $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$, *dan is* $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{7}$, $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2\cos\frac{3\pi}{7}$, $z^5 + \frac{1}{z^5} = 2\cos\frac{5\pi}{7}$ *en ook* $z^7 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ *of* $z^7 + 1 = 0$.

Nu is $A = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2}(z^3+\frac{1}{z^3})+\frac{1}{2}(z^5+\frac{1}{z^5}) = \frac{z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1}{2z^5}$.
Vermits $z^7+1=0$ *kunnen we dit herschrijven als:*
$A = \frac{z^6+z^4-z^3+z^2-z+1}{2z^5} = \frac{z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1+z^5}{2z^5}$.
Maar de teller van deze breuk is $\frac{z^7+1}{z+1}+z^5 = z^5$, *zodat* $A = \frac{1}{2}$.

9. Vectoriële bewijzen

   Vectoriële bewijzen worden veel gebruikt bij meetkundige toepassingen evenals bij problemen die met krachten te maken hebben. Ze hebben het grote voordeel dat ze meestal kort en duidelijk zijn en meer complexe berekeningen met cordinaten vermijden (en vereenvoudigen). Bovendien zijn ze ook zeer geschikt voor behandelingen in de ruimtemeetkunde.

   Voorbeeld 20. *Bepaal de meetkundige plaats van het midden van* $[PQ]$ *als we vertrekken van een convexe vierhoek* $ABCD$ *met diagonaal* $[AC]$ *en waarbij* $ME \in [AC]$, $MP \parallel AB$ *en* $MQ \parallel DC$.
   Stel $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{d}$ *en* $t = \frac{|AM|}{|AC|}$.
   Dan is $\overrightarrow{CP} = (1-t)\vec{b}$ *en* $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MQ} = (1-t)\vec{a} + t\vec{d}$. *Als* R *het midden is van* $[PQ]$, *volgt er :* $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}\big) = \frac{1}{2}\big((1-t)(\vec{a}+\vec{b})+t\vec{d}\big)$ *en dat bewijst dat de meetkundige plaats een lijnstuk is waarvan de eindpunten corresponderen respectievelijk met* $t=0$ *en* $t=1$, *die de middelpunten zijn van respectievelijk* $[AB]$ *en* $[DC]$.