Diophantische vergelijkingen

1 Wat zijn Diophantische vergelijkingen ?

- Een Diophantische vergelijking is een veeltermvergelijking waarbij zowel de coëfficiënten als de oplossingen gehele getallen moeten zijn. Het type vergelijkingen is genoemd naar de Griekse wiskundige Diophantus van Alexandrië. In de loop van de derde eeuw na Christus schreef Diophantus van Alexandrië de *Arithmetica*, een verzameling van 130 problemen (met oplossingen) uit de algebra en de rekenkunde. De *Arithmetica* bestond uit 13 boeken, waarvan er maar 6 bewaard zijn gebleven. Van 4 andere heeft men in 1968 wel een Arabische vertaling gevonden. Diophantus realiseert op twee vlakken een belangrijke vooruitgang. Ten eerste verruimt hij het getalbegrip door breuken als getallen te beschouwen. Voorheen werden breuken uitsluitend opgevat als een verhouding van getallen, maar ze werden niet als getal op zich beschouwd. Een tweede doorbraak die Diophantus realiseert, is het gebruik van symbolen. Vandaag vinden we het de normaalste zaak een onbekende voor te stellen door een letter, bijvoorbeeld x. Het kwadraat van die onbekende stellen we voor door x^2. Het werk van Diophantus is het oudste werk waarin dergelijke algebraïsche notaties worden gebruikt. Daardoor noemt man Diophantus wel eens de vader van de algebra. Sinds het werk van Diophantus moeten een rekenkundig bewijs niet meer meetkundig worden geformuleerd, zoals het nog wel het geval was bij Euclides.

- Voorbeelden van Diophantische vergelijkingen zijn:

  1. $x - 2y = 1$: een Diophantische vergelijking van de 1ste graad met 2 onbekenden. Het aantal gehele oplossingen (x,y) van deze vergelijking is oneindig. Voorbeelden van oplossingen zijn (3,1), (5,2), ...
  2. $x^n + y^n = z^n$: de meest bekende Diophantische vergelijking. Voor n = 2 zijn de gehele oplossingen (x,y,z) de Pythagorese drietallen,

hiervan zijn er oneindig veel (bvb. (3, 4, 5) , (5, 12, 13), ...). Voor $n > 2$, zegt de laatste stelling van Fermat dat er geen gehele getallen (x, y, z) aan de vergelijking voldoen.

3. $x^2 - ny^2 = 1$: deze vergelijking werd door Euler ten onrechte toegeschreven aan de Engelse wiskundige John Pell (1611-1685), en staat bekend als de vergelijking van Pell. Maar de vergelijking was reeds eeuwen daarvoor uitvoerig bestudeerd door Indische wiskundigen. Fermat bewees dat deze vergelijking altijd een oplossing heeft behalve wanneer n een kwadraat is.

- Diophantische vergelijkingen kunnen er bedrieglijk eenvoudig uit zien. Zo zo'n vergelijking al is op te lossen, vereist het vaak zeer geavanceerde wiskunde op het grensvlak van getaltheorie, algebra, meetkunde en analyse.

2 De Diophantische vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$.

- Een *Pythagorees drietal* is een drietal (x, y, z) van positieve gehele getallen dat voldoet aan $x^2 + y^2 = z^2$. Zo zijn $(3, 4, 5)$ en $(5, 12, 13)$ Pythagorese drietallen.

- Het is duidelijk dat, als (x, y, z) een Pythagorees drietal is, dat ook (dx, dy, dz) met $d \in \mathbb{N}$ een Pythagorees drietal is. Immers
$(dx)^2 + (dy)^2 = d^2x^2 + d^2y^2 = d^2(x^2 + y^2) = d^2z^2 = (dz)^2$
Pythagorese drietallen (x, y, z) met x, y, z relatief priem (d.w.z. dat ze geen factor gemeenschappelijk hebben) noemen we *primitieve Pythagorese drietallen.*

- **Stelling 2.1** *Als u, v relatief priem, postieve gehele getallen zijn , waarvan er 1 even is en met $u > v$, dan is $(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$ een primitief Pythagoras drietal. Omgekeerd is elk primitief Pythagoras drietal van die vorm.*

  Als (x, y, z) voldoet aan de voorwaarden, dan is $x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = z^2$ en dus is (x, y, z) een Pythagoras drietal. Het primitief zijn volgt uit het feit dat u en v onderling ondeelbaar zijn.
  Als omgekeerd (x, y, z) een primitief Pythagoras drietal is dan kan x en y nooit samen even zijn (want dan zou z ook even zijn en zijn x,y en z niet relatief priem) of samen oneven zijn (want x^2 en y^2 zouden dan een viervoud plus 1 zijn en hun som een viervoud plus 2. Maar z^2 kan

nooit bij deling door 4 als rest 2 hebben) . Dus veronderstel x oneven en y even, dan is z zeker oneven en dan zijn $m = \frac{x+z}{2}$ en $n = \frac{z-x}{2}$ positieve gehele getallen. Omdat $x = m-n$ en $z = m+n$ geen gemeenschappelijke deler hebben, kunnen m en n ook geen gemeenschappelijke deler hebben. Nu is $(\frac{y}{2})^2 = \frac{z^2-x^2}{4} = mn$. Dus zijn m en n volkomen kwadraten en kunen we stellen dat $m = u^2$ en $n = v^2$. Hieruit volgt dat $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ en $z = u^2 + v^2$. Omdat x oneven is zal een van de getallen u of even zijn en het andere oneven. Hiermee is het gestelde bewezen

3 De Diophantische vergelijking $ax + by = c$

- In een doos zijn er kevers en spinnen. Men telt in het totaal 46 poten. Hoeveel kevers en hoeveel spinnen zijn er? Het probleem komt neer op de vergelijking $6x + 8y = 46$ waarbij enkel gehele(hier zelfs natuurlijke) oplossingen zinvol zijn. Het is dus een Diophantische vergelijking.

- De methode van het gokken zal hier wellicht de efficiëntste zijn. Toch zoeken we naar een meer systematische methode om vergelijkingen van de vorm $ax + by = c$ op te lossen in $\mathbb{Z}^2$.

- Een eerste methode bestaat erin de vergelijking op te lossen in $\mathbb{R}^2$ en daarna te onderzoeken welke oplossingen geheel zijn.
  $6x + 8y = 46 \Rightarrow y = \frac{23-3x}{4}$. Het probleem wordt dus : zoek de gehele waarden van x zo dat $\frac{23-3x}{4} \in \mathbb{Z}$.
  $\frac{23-3x}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4|23 - 3x$ Dit is het geval als $x = 1$ en dus ook voor $x = 1 + 4k$ met $k \in \mathbb{Z}$. Dit geeft ons alle oplossingen : $(1 + 4k, 5 - 3k)$, met $k \in \mathbb{Z}$. Wat ons potenprobleem betreft, komen alleen (1,5) en (5,2) in aanmerking omdat x en y positief moesten zijn.

- Een tweede methode steunt op het algoritme van Euclides en geeft ons ook een nodige en voldoende voorwaarde opdat de gegeven vergelijking oplossingen zou hebben.

  Stelling 3.1 *$ax + by = c$ heeft oplossingen als en slechts als c een veelvoud is van de grootste gemene deler van a en b.*

  Met het algoritme van Euclides kunnen we ggd(a,b) schrijven als een lineaire combinatie van a en b :zeg ggd(a,b)= $ax_1 + by_1$. Maar ggd(a,b) is een deler van c, dus $c = u$.ggd(a,b) en bijgevolg is $c = u.(ax_1+by_1) = a.(ux_1) + b.(uy_1)$. Dit levert ons een oplossing op van de gegeven vergelijking $(x, y) = (ux_1, uy_1)$.

- Toegepast op het potenprobleem : ggd(4,6)= 2 en $2 = (-1).6 + 1.8$. Bovendien is $46 = 2.23$, dus een oplossing van het probleem is $(-23, 23)$. Maar hoe vinden we dan alle oplossingen? Elke oplossing (x, y) voldoet aan $6x + 8y = 6.(-23) + 8.23$, dus $6(x + 23) + 8(y - 23) = 0$ of $3(x + 23) + 4(y - 23) = 0$. Hieruit volgt dat 4 een deler moet zijn van $x+23$ en dat 3 een deler moet zijn van $y-23$. Bijgevolg is $x = -23+4t$ en $y = 23+4s$ met $t, s \in \mathbb{Z}$. Hiermee is echter nog niet gezegd dat voor elke $t, s \in \mathbb{Z}$:$(-23 + 4t, 23 + 4s)$ een oplossing is. We vullen dus in : $6.(-23+4t)+8.(23+4s) = 46$. Dit geeft $s = -t$. Alle oplossingen van $6x + 8y = 46$ worden dus gegeven door $(-23 + 4t, 23 - 4t)$ met $t \in \mathbb{Z}$. Algemeen : stel dat (x_0, y_0) een oplossing is van $ax + by = c$, dan worden alle oplossingen gegeven door $(x_0 + \frac{b}{ggd(a,b)}.t, y_0 - \frac{a}{ggd(a,b)}.t)$ met $t \in \mathbb{Z}$.

4 Andere Diophantische vergelijkingen

- In het vorig deel hebben we een algemene oplossingsmethode gevonden voor Diophantische vergelijkingen van de eerste graad in twee onbekenden. Voor ingewikkelder Diophantische vergelijkingen bestaat (nog?) geen algemene oplossingsmethode. Het is een domein waar nog heel wat onderzoek in gebeurt; denk maar aan de laatste stelling van Fermat die zegt dat de Diophantische vergelijkingen $x^n + y^n = z^n$ voor $n \geq 3$ geen oplossingen hebben. Deze stelling is pas onlangs door A.Wiles bewezen.

- Een ander voorbeeld is het Isis-probleem, dat zijn naam dankt aan een mythische connectie met de cultus van de Oudegyptische godin Isis : Welke rechthoeken, met gehele getallen als zijden, hebben de eigenschap dat hun oppervlakte en hun omtrek (als getal) gelijk zijn ? Als we de zijden van die rechthoek noteren met x en y, dan wordt dit probleem beschreven door de Diophantische vergelijking $xy = 2x + 2y$. Een mogelijke oplossingsmethode bestaat erin dit te herschrijven als $xy - 2x - 2y = 0$ of $xy - 2x - 2y + 4 = 4$. Door ontbinding in factoren wordt dit $(x - 2)(y - 2) = 4$. Vermits x en y gehele getallen moeten zijn, moet $x-2$ een deler zijn van 4 dus gelijk aan 1,-1,2,-2,4 of -4. Wat leidt tot een beperkt aantal mogelijkheden die men kan controleren.

- In het eerste hoofdstuk hebben we reeds de vergelijking van Pell vermeld. Dit zijn Diophantische vergelijkingen van het type $x^2 - Ny^2 = 1$. Als N een kwadraat is dan kunnen we door ontbinding in factoren zien dat er enkel triviale oplossingen bestaan , nl. $x = \pm 1$ en $y = 0$. Nemen we voor N geen kwadraat, zoals bijvoorbeeld $x^2 - 2y^2 = 1$ dan wordt het wat moeilijker. Bestuderen we enkel positieve oplossingen. Door proberen vinden we dat $3^2 - 2.2^2 = 1$ dus $(3, 2)$ is een oplossing. Verder proberen geeft $17^2 - 2.12^2 = 1$, dus ook $(17, 12)$ is een oplossing. Iemand met veel geduld vind dat $99^2 - 2.70^2 = 1$. Het zal blijken dat de lijst met oplossingen oneindig lang is. Reeds in de oudheid had men gezien dat voor waarden van N verschillend van een kwadraat, er steeds niet triviale oplossingen kunnen worden gevonden. Het is wel duidelijk dat door lukraak te zoeken je nooit alle oplossingen gaat vinden. In 1657 vond de Engelse wiskundige W. Brouncker een oplossingsmethode. Deze oplossingsmethode werd beschreven in het boek van J.Wallis over algebra en getaltheorie. Door een misverstand nam Euler aan dat de oplossingsmethode van John Pell afkomstig was. Sindsdien is Pell's naam aan deze vergelijking blijven kleven. De methode van Brounker steunt op de theorie van kettingbreuken.

Stelling 4.1 *Stel $N \in \mathbb{N}$ en stel dat N geen kwadraat is. Dan bestaan er gehele oplossingen voor $x^2 - Ny^2 = 1$*

Hoe vinden we dan alle oplossingen?

Stelling 4.2 *Zij (p, q) positieve gehele oplossingen van $x^2 - Ny^2 = 1$ zo dat $p + q\sqrt{N}$ minimale waarde heeft. Dan bestaat er bij iedere oplossing $x, y \in \mathbb{N}$ een natuurlijk getal n met $x + y\sqrt{N} = (p + q\sqrt{N})^n$.*

- De oplossingsmethode leggen we uit aan de hand van een voorbeeld : $x^2 - 61y^2 = 1$

  1. Noteer $\sqrt{61}$ als kettingbreuk : $\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$
  2. Construeer de breuk die overeenkomt met $[7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1]$ $\dfrac{p}{q} = \dfrac{29718}{3805}$
  3. $p^2 - Nq^2 = 29718^2 - 61.3805^2 = -1$. Om aan 1 te komen merken we op dat $(p^2 + Nq^2)^2 - N(2pq)^2 = (p^2 - Nq^2)^2 = 1$. Dus $x = p^2 + Nq^2 = 1766319049$ en $y = 2pq = 226153980$ zijn oplossingen van de gegeven Diophantische vergelijking.
  4. Alle oplossingen vinden we door de machten $(1766319049 + 226153980\sqrt{61})^n$ uit te rekenen.

- Een mooie toepassing is de vraag of er kwadraten zijn die tevens een driehoeksgetal zijn. Hiervoor moeten we de Diophantische vergelijking

$m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ oplossen. Door beide leden met 8 te vermenigvuldigen kan je deze vergelijking herschrijven als $(2n+1)^2 - m^2 = 1$. We zijn nu bij een vergelijking van Pell terechtgekomen met $N = 8$. De kleinste oplossing is $3^2 - 8.1^2 = 1$, corresponderend met $m = 1$. Deze flauwe oplossing kunnen we gebruiken om andere oplossingen te vinden. We rekenen de machten van $3 + \sqrt{8}$ uit.
$(3 + \sqrt{8})^2 = 17 + 6\sqrt{8}$
$(3 + \sqrt{8})^3 = 99 + 35\sqrt{8}$
$(3 + \sqrt{8})^4 = 577 + 204\sqrt{8}$
Deze corresponderen met de kwadraten $m^2 = 6^2, 35^2, 204^2, \cdots$ die tevens driehoeksgetal zijn.