Heron driehoek

1 Wat is een Heron driehoek ?

- De naam Heron (Heroon) is bekend van de formule

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ met } s = \frac{a+b+c}{2}$$

  die gebruikt wordt om de oppervlakte Δ van een driehoek te berekenen in functie van de lengten a, b, c van de zijden.

- Heron leefde vermoedelijk gedurende de eerste eeuw in Alexandrië en introduceerde de definities van punt, rechte, e.d. in de "Elementen"van Euclides. Zijn naam is verder ook geassocieerd aan de observatie dat de driehoek met zijden 13,14 en 15 als oppervlakte 84 heeft. In zijn werk "Metrica", een beschrijving hoe oppervlaktes en volumes van diverse objecten te berekenen, bewijst hij bovenstaande formule.

- Een driehoek waar de lengten van de zijden en de oppervlakte natuurlijke getallen zijn noemt men een *Heron driehoek.* Zo een driehoek noteren we met (a, b, c, Δ) of (a, b, c). Als bovendien de lengten van de zijden onderling ondeelbaar zijn (dus hun g.g.d. is 1), dan noemen we dit een *primitieve Heron driehoek.*

- Soms wordt een driehoek waarvan de lengten van de zijden en de oppervlakte rationale getallen zijn ook een Heron driehoek genoemd. Wij zullen zo een driehoek een *rationale* Heron driehoek noemen.

- Een Heron driehoek zoeken komt neer op het oplossen van de Diophantische vergelijking :

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

  of equivalent hiermee

$$16\Delta^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

2 Eigenschappen van een Heron driehoek

- **Stelling 2.1** *De omtrek van een Heron driehoek is even.*

  Stel dat $a+b+c$ oneven zou zijn, dan zijn ook $a-b+c, a+b-c$ en $b+c-a$ oneven. Maar dan is $s(s-a)(s-b)(s-c)$ een oneven getal gedeeld door 16 en dus kan Δ nooit geheel zijn.

- **Stelling 2.2** *Elk primitief Pythagorees drietal bepaalt een primitieve Heron driehoek.*

  Elk primitief Pythagorees drietal (a, b, c) wordt verkregen door $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ en $c = m^2 + n^2$ met $m > n$, gehele getallen die relatief priem zijn er waarvan er 1 even is. De oppervlakte $\Delta = \frac{1}{2}ab = mn(m^2 - n^2)$ is dus zeker geheel en bijgevolg heb je een primitieve Heron driehoek.

  Een dergelijke driehoek noemt men een *Pythagoras driehoek*. Dus elke Pythagoras driehoek is een Heron driehoek , maar omgekeerd is niet elke Heron driehoek een Pythagoras driehoek.

- **Stelling 2.3** *In een primitieve Heron driehoek is de lengte van juist 1 zijde even*

  In een Heron driehoek geldt $16\Delta^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$ De lengten van de drie zijden kunnen nooit allemaal even zijn , want dan is de driehoek niet primitief. Als er twee even lengten zijn, dan is het rechterlid van bovenstaande betekking een viervoud -1, terwijl het linkerlid een viervoud is. Dat kan dus niet. Als er geen enkele zijden even is , dan is het rechterlid een viervoud plus 3 . Dus ook dat kan niet. Bijgevolg heeft juist 1 zijde een even lengte.

- **Stelling 2.4** *Als de lengten van de zijden van een Heron driehoek een gemeeenschappelijke factor r hebben dan is de oppervlakte van de driehoek deelbaar door r^2.*

  Stel $a = ra'$, $b = rb'$ en $c = rc'$. Uit $16\Delta^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$ volgt dan dat $16\Delta^2 = r^4(2(a'^2b'^2 + a'^2c'^2 + b'^2c'^2) - a'^4 - b'^4 - c'^4)$. Als $r \neq 2$ is hiermee de eigenschap bewezen.
  Van de 3 even getallen a, b en c moet er juist 1 een viervoud zijn , anders zou $s(s-a)(s-b)(s-c)$ een 4 voud +3 zijn en dus nooit een volkomen kwadraat zijn. Dan zijn juist 2 van de getallens, $s-a, s-b, s-c$ een viervoud en dus is Δ deelbaar door 4.

Hieruit volgt dat (a, b, c) een Heron driehoek is met $d =$ ggd (a, b, c) als en slechts als $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ ook een Heron driehoek is. Het volstaat dus de primitieve Heron driehoeken te bestuderen.

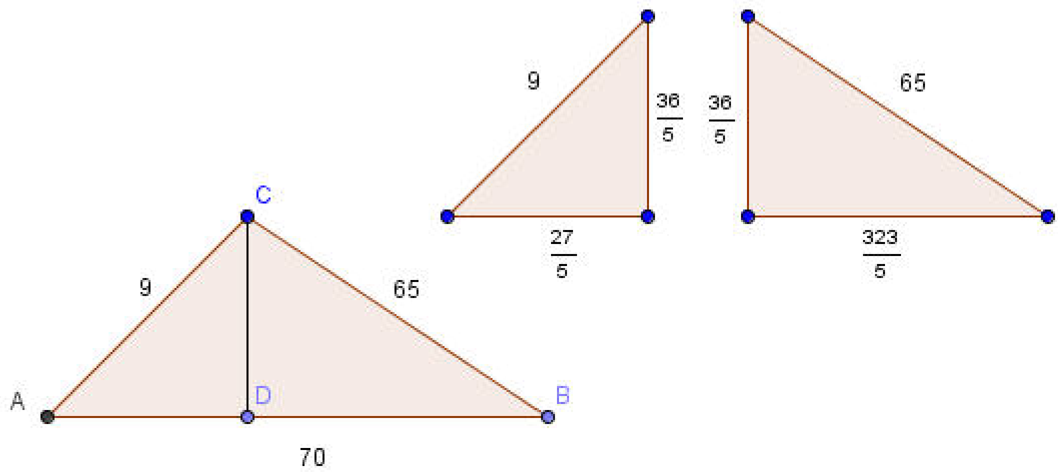
- **Stelling 2.5** *In een Heron driehoek is s nooit priem .*

  Stel $s = p$ met p priem. Omdat $s - a < p$ zal in het product $s(s-a)(s-b)(s-c)$ de factor p met exponent 1 voorkomen en dus kan Δ nooit een natuurlijk getal zijn.

- **Stelling 2.6** *Een hoogtelijn in een Heron driehoek heeft een rationaal getal als lengte.*

  Stel h_a de hoogtelijn uit A op de zijde met lengte a. Dan is $\Delta = \frac{1}{2}a.h$ of $h = \dfrac{2.\Delta}{a} \in \mathbb{Q}$.

  Als de hoogtelijn bovendien binnen de driehoek ligt, verdeelt hij de Heron driehoek in twee rechthoekige Heron driehoeken. Dus driehoeken waarvan de zijden door schaling zijn om te vormen tot Pythagorese driehoeken. Omdat er altijd minstens 1 hoogtelijn binnen de driehoek valt, is elke Heron driehoek te krijgen door twee rationale Pythaoras driehoeken aan elkaar te lijmen driehoeken.



Van de rationale Pythagoras driehoeken kan men door een schaalvergroting met factor 5 Pythagoras driehoeken maken.

3 Parametrisatie van Heron driehoeken

- We kennen een manier om alle primitieve Pythagorese drietallen te genereren. En omdat Pythagorese drietallen ook Heron driehoeken zijn , kunnen we vermoeden dat er ook formules bestaan om primitieve Heron driehoeken te genereren. De Indische wiskundige Brahmagupta (598-668) vond zo een formule, die later door Carmichael en Euler verbeterd is.

- **Stelling 3.1** *Elke Heron driehoek is gelijkvormig met een driehoek verkregen door*

$$a = u(v^2 + w^2)$$
$$b = v(u^2 + w^2)$$
$$c = (u + v)(uv - w^2)$$

met $u, v \in \mathbb{Z}$.
Als de getallen u, v, w *bovendien onderling ondeelbaar zijn en* $u \geq v \geq 1 en\ uv > w^2 \geq \frac{u^2v}{2u + v}$ *dan wordt elke klasse van gelijkvormige driehoeken juist 1 keer gevonden.*

- Met deze parametrisatie vinden we dat $s = uv(u + v)$ en $\Delta = uvw(u + v)(uv - w^2)$

- Nemen we $u = 2$ en $v = w = 1$, dan vinden we de rechthoekige driehoek $(3, 4, 5)$.

- Nemen we $u = 3$ en $v = w = 2$, dan vinden we de de rechthoekige driehoek $(10, 24, 26)$. Deze is niet primitief. In de klassen van gelijkvormige driehoeken waar $(10, 24, 26)$ toe behoort vinden we het exemplaar $(5, 12, 13)$, dat wel primitief is.

- Nemen we $u = v = 3$ en $w = 2$, dan vinden we de driehoek $(30, 39, 39)$. De primitieve driehoek in de klasse van $(30, 39, 39)$ is $(10, 13, 13)$.

4 Heron driehoeken waarvan de lengten van de zijden opeenvolgende gehele getallen zijn

- Stel de lengten van die zijden voor door $b - 1, b$ en $b + 1$. Dan is $s = \frac{3}{2}b$ en de oppervlakte van de driehoek is dan $\Delta = \frac{b\sqrt{3(b^2 - 4)}}{4}$.

- Als b oneven zou zijn, dan is ook $3(b^2-4)$ oneven en dan kan Δ nooit een geheel getal zijn. Dus b moet even zijn. We noteren $b = 2x$ en dan is $\Delta = x\sqrt{3(x^2-1)}$.
- Om een Heron driehoek te krijgen moet $3(x^2-1)$ een volkomen kwadraat zijn. Dus moet er een geheel getal y bestaan waarvoor $x^2 - 1 = 3y^2$ of m.a.w. $x^2 - 3y^2 = 1$.. Deze vergelijking is een Diophantische vergelijking, namelijk een vergelijking van Pell.
- De oplossing van deze vergelijking gebeurt als volgt :
  1. Noteer $\sqrt{3}$ als kettingbreuk : $\left[1; \overline{1,2}\right]$.
  2. Construeer de breuk die overeenkomt met $[1;1]$: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2}{1}$.
  3. $p^2 - 3q^2 = 2^2 - 3.1^2 = 1$. De kleinste oplossing van de gegeven Pell vergelijking is dus $(2,1)$. Alle oplossingen worden bekomen door de machten $(2+\sqrt{3})^n$ uit te rekenen. Deze berekening geeft als oplossingen voor x : $2, 7, 26, 97, 362, 1351, \ldots$.
  4. Een tabel dan waarbij a, b, c wordt uitgerekend en de oppervlakte:

n	a	b	c	Δ
1	3	4	5	6
2	13	14	15	84
3	51	52	53	1170
4	193	194	195	16296
5	723	724	725	226974
6	2701	2702	2703	3161340
7	10083	10084	10085	44031786
8	37633	37634	37635	613283664
9	140451	140452	140453	8541939510
10	524173	524174	524175	118973869476

5 Verder onderzoek

Het onderzoek naar Heron driehoeken is hedendaags. Er wordt met andere woorden nu nog steeds onderzoek gedaan naar eigenschappen van Heron driehoeken of naar het zoeken naar Heron driehoeken die een bepaalde eigenschap hebben. Een paar voorbeelden :

- $(24, 35, 53)$ en $(14, 48, 50)$ zijn twee niet congruente Heron driehoeken met dezelfde oppervlakte $\Delta = 336$ en omtrek $2s = 112$. Zijn er nog andere van dergelijke duo's? Hoeveel zijn er?

- Zijn er Heron driehoeken waarvan alle zwaartelijnen gehele lengten hebben?

- Zijn er Heron driehoeken waarvan de lengten van de zijden Fibonacci getallen zijn?

- Zijn er Heron driehoeken waarvan de zijden volkomen kwadraten zijn en waarvan de deellijnen gehele lengten hebben?

- Zijn er Heron driehoeken waarvan de lengten van de zijden elementen zijn van een rekenkundige rij?

- Geef alle Heron driehoeken met diameter $n = \max \{a, b, c\}$.

- Is het mogelijk dat de lengten van twee zijden van een primitieve Heron driehoek een gemeenschappelijke factor hebben? En wat weet je over die gemeenschappelijke factor? Bijvoorbeeld $(45, 296, 325)$ is een primitieve Heron driehoek en twee zijden hebben de gemeenschappelijke factor 5.

- Veralgemeen de problemen tot Heron piramides: piramides waarvan de lengten van alle zijden , alsook de oppervlakten van de zijvlakken en de inhoud gehele getallen zijn.