Hoofdstuk 4

Eenheden van $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2)$

4.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2)$

Stel $V = \{1, a, b, ab\}$ de viergroep en $\mathbb{Q}V = \{x+ya+zb+tab : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$. We weten dat $V \cong C_2 \times C_2$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}V, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

V is een abelse groep met vier toevoegingsklassen en dus vier irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{array}{l}
\rho_1 : V \to \mathbb{Q} : a \mapsto 1 \text{ en } b \mapsto 1 \\
\rho_2 : V \to \mathbb{Q} : a \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto 1 \\
\rho_3 : V \to \mathbb{Q} : a \mapsto 1 \text{ en } b \mapsto -1 \\
\rho_4 : V \to \mathbb{Q} : a \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto -1
\end{array}$$

We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}V$:

$$\rho_1 : \mathbb{Q}V \to \mathbb{Q} : x + ya + zb + tab \mapsto x + y + z + t$$

$$\rho_2 : \mathbb{Q}V \to \mathbb{Q} : x + ya + zb + tab \mapsto x - y + z - t$$

$$\rho_3 : \mathbb{Q}V \to \mathbb{Q} : x + ya + zb + tab \mapsto x + y - z - t$$

$$\rho_4 : \mathbb{Q}V \to \mathbb{Q} : x + ya + zb + tab \mapsto x - y - z + t$$

We definiëren tenslotte:

$$\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) : \mathbb{Q}V \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} :$$
$$x + ya + zb + tab \mapsto (x + y + z + t, x - y + z - t, x + y - z - t, x - y - z + t)$$

Of met de matrixnotatie:

$$\rho(x + ya + zb + tab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Stelling 4.1. *$\mathbb{Q}V \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}$-algebra*

Bewijs. Omdat $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ lineaire uitbreidingen zijn, wordt de optelling en de vermenigvuldiging met rationale getallen behouden. Omdat $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ groepshomomorfismen zijn, wordt ook de vermenigvuldiging behouden. Rest ons nog aan te tonen dat ρ bijectief is.
Veronderstel dat $g = x+ya+zb+tab$ en $h = m+na+pb+qab$ en $\rho(g) = \rho(h)$, dan is

$$\begin{cases} x + y + z + t = m + n + p + q \\ x - y + z - t = m - n + p - q \\ x + y - z - t = m + n - p - q \\ x - y - z + t = m - n - p + q \end{cases}$$

Tellen we de vier vergelijking op bij elkaar dan bekomen we $4x = 4m$ of $x = m$. Als we dan de eerste vergelijking optellen bij de tweede vinden we dat $z = p$. Analoog zal $y = n$ en $t = q$. Bijgevolg is $g = h$ en is ρ injectief.
Neem (x, y, z, t) een willekeurig element uit $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. Construeer $g = \frac{1}{4}(x+y+z+t)+\frac{1}{4}(x-y+z-t)a+\frac{1}{4}(x+y-z-t)b+\frac{1}{4}(x-y-z+t)ab \in \mathbb{Q}V$, dan is $\rho(g) = (x, y, z, t)$ en dus is ρ surjectief. □

4.2 De groepsring $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2)$

De groep der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ is $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}V$ noteren we met H. Het is duidelijk dat, via ρ, geldt dat $H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Elk element van de $\mathbb{Z}$-algebra $\mathbb{Z}V$ wordt door ρ afgebeeld in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Dus $\mathbb{Z}V \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}V$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{4}(1+a+b+ab) \in \mathbb{Q}V$ en $\rho(x) = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Bijgevolg is $x \in H \setminus \mathbb{Z}V$. We vragen ons af welke deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ overeenkomt met $\mathbb{Z}V$.

Stelling 4.2. $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2) \cong A \cup B \cup C \cup D$ *met*

$$\begin{aligned}
A &= \{(k,l,m,n) \equiv (n,-n,-n,n) \ mod\ 4\}\\
B &= \{(k,l,m,n) \equiv (2+n,2-n,-n,n) \ mod\ 4\}\\
C &= \{(k,l,m,n) \equiv (2+n,-n,2-n,n) \ mod\ 4\}\\
D &= \{(k,l,m,n) \equiv (2-n,2-n,2-n,n) \ mod\ 4\}
\end{aligned}$$

Bewijs. Noteer $\rho(\mathbb{Z}V) = K$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in K &\Longleftrightarrow \exists k + la + mb + nab \in \mathbb{Z}V : \rho(k + la + mb + nab) = (x,y,z,t)\\
&\Longleftrightarrow \exists k,l,m,n \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k\\ l\\ m\\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \exists k,l,m,n \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} k\\ l\\ m\\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t \equiv 0 \text{ mod } 4\\ x-y+z-t \equiv 0 \text{ mod } 4\\ x+y-z-t \equiv 0 \text{ mod } 4\\ x-y-z+t \equiv 0 \text{ mod } 4 \end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 2(y+t) \equiv 0 \text{ mod } 4\\ 2(z+t) \equiv 0 \text{ mod } 4\\ x+y+z+t \equiv 0 \text{ mod } 4 \end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y+t \equiv 0 \text{ mod } 4 \text{ of } y+t \equiv 2 \text{ mod } 4\\ z+t \equiv 0 \text{ mod } 4 \text{ of } z+t \equiv 2 \text{ mod } 4\\ x+y+z+t \equiv 0 \text{ mod } 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Als we uit vergelijking 1 en 2 de eerste voorwaarden combineren met de laatste vergelijking, vinden we dat $y \equiv -t \text{ mod } 4$, $z \equiv -t \text{ mod } 4$ en $x \equiv t \text{ mod } 4$. Zo vinden we de elementen uit A. Op analoge wijze vinden we de elementen uit B,C en D. □

4.3 Eenheden in $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2)$

Stelling 4.3. *Alle eenheden van $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2)$ zijn triviaal of $U(\mathbb{Z}(C_2 \times C_2)) = \pm C_2 \times C_2$*

Bewijs. Omdat $\mathbb{Z}V$ isomorf is met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, bepalen we eerst de eenheden in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z})$. Dus is $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. De elementen $(-1, 1, 1, -1)$ en $(1, -1, -1, 1)$ behoren tot A. De elementen $(1, -1, 1, -1)$ en $(-1, 1, -1, 1)$ behoren tot B. De elementen $(1, 1, -1, -1)$ en $(-1, -1, 1, 1)$ behoren tot C. En de elementen $(1, 1, 1, 1)$ en $(-1, -1, -1, -1)$ behoren tot D. De overeenkomstige elementen in $\mathbb{Z}V$ zijn dan de eenheden in $\mathbb{Z}V$. Dit zijn de elementen $\pm 1, \pm a, \pm b, \pm ab$. $\square$

Er zijn dus 8 elementen van $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}V)$. Dit zijn dan elementen van $U(H) \setminus \mathbb{Z}V$. Zo komt met $(1, 1, 1, -1)$ het element $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ab$ overeen.