Hoofdstuk 2

Eenheden van $\mathbb{Z}C_3$

2.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}C_3$

Stel $C_3 = \{1, g, g^2\}$ de cyclische groep van orde 3. Definieer vervolgens $\mathbb{Q}C_3 = \{a + bg + cg^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}C_3, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

C_3 is een abelse groep met drie toevoegingsklassen en dus drie irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{array}{l} \rho_1 : C_3 \to \mathbb{Q} : g \mapsto 1 \\ \rho_2 : C_3 \to \mathbb{Q}(\omega) : g \mapsto \omega \\ \rho_3 : C_3 \to \mathbb{Q}(\omega) : g \mapsto \omega^2 \end{array}$$

Hierbij is ω een derdemachtswortel uit 1, dus $\omega^3 = 1$ of $\omega^2 = -\omega - 1$ en $\mathbb{Q}(\omega) = \{a + b\omega \text{ met } a, b \in \mathbb{Q}\}$.
We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}C_3$:

$$\begin{array}{l} \rho_1 : \mathbb{Q}C_3 \to \mathbb{Q} : a + bg + cg^2 \mapsto a + b + c \\ \rho_2 : \mathbb{Q}C_3 \to \mathbb{Q}(\omega) : a + bg + cg^2 \mapsto (a - c) + (b - c)\omega \\ \rho_3 : \mathbb{Q}C_3 \to \mathbb{Q}(\omega) : a + bg + cg^2 \mapsto (a - b) + (c - b)\omega \end{array}$$

We definiëren tenslotte:

$$\begin{array}{c} \rho = (\rho_1, \rho_2) : \mathbb{Q}C_3 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega) : \\ a + bg + cg^2 \mapsto (a + b + c, (a - c) + (b - c)\omega) \end{array}$$

Als we het element $(a+b+c, (a-c)+(b-c)\omega)$ identificeren met $(a+b+c, a-c, b-c)$ kunnen we met de matrixnotatie werken:

$$\rho(a+bg+cg^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Stelling 2.1. $\mathbb{Q}C_3 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega)$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

Bewijs. Omdat ρ_1, ρ_2 lineaire uitbreidingen zijn, wordt de optelling en de vermenigvuldiging met rationale getallen behouden. Omdat ρ_1, ρ_2 groepshomomorfismen zijn, wordt ook de vermenigvuldiging behouden. Rest ons nog aan te tonen dat ρ bijectief is.
Veronderstel dat $x = a + bg + cg^2$ en $y = d + eg + fg^2$ en $\rho(x) = \rho(y)$, dan is

$$\begin{cases} a+b+c = d+e+f \\ a-c = d-f \\ b-c = e-f \end{cases}$$

Uit vergelijking 2 en 3 vinden we dat $a = c + d - f$ en $b = c + e - f$. Als we dit invullen in de eerste vergelijking verkrijgen we: $c = f$. En dus is ook $a = d$ en $b = e$. Bijgevolg is $x = y$ en is ρ injectief.
Neem $(x, y + z\omega)$ een willekeurig element uit $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega)$.
Construeer $h = \frac{1}{3}(x+2y-z) + \frac{1}{3}(x-y+2z)g + \frac{1}{3}(x-y-z)g^2 \in \mathbb{Q}C_3$, dan is $\rho(h) = (x, y+z\omega)$ en dus is ρ surjectief. $\square$

2.2 De groepsring $\mathbb{Z}C_3$

De groep der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega)$ is $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}C_3$ noteren we met H. Het is duidelijk dat, via ρ, geldt dat $H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. Elk element van de $\mathbb{Z}$-algebra $\mathbb{Z}C_3$ wordt door ρ afgebeeld in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. Dus $\mathbb{Z}C_3 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}C_3$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{3}(1+g+g^2) \in \mathbb{Q}C_3$ en $\rho(x) = (1,0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. Bijgevolg is $x \in H \setminus \mathbb{Z}C_3$. We vragen ons af welke deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$ overeenkomt met $\mathbb{Z}C_3$.

Stelling 2.2. $\mathbb{Z}C_3 \cong \{(a, b + c\omega) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega) : a \equiv b + c \ mod\ 3\}$

Bewijs. Noteer $\rho(\mathbb{Z}C_3) = A$. Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
(x, y + z\omega) \in A &\Longleftrightarrow \exists a + bg + cg^2 \in \mathbb{Z}C_3 : \rho(a + bg + cg^2) = (x, y + z\omega) \\
&\Longleftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z \equiv 0 \text{ mod } 3 \\ x - y + 2z \equiv 0 \text{ mod } 3 \\ x - y - z \equiv 0 \text{ mod } 3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow x - y - z \equiv 0 \text{ mod } 3 \\
&\Longleftrightarrow x \equiv y + z \text{ mod } 3
\end{aligned}
$$

□

2.3 Eenheden in $\mathbb{Z}C_3$

Stelling 2.3. *Alle eenheden van* $\mathbb{Z}C_3$ *zijn triviaal of* $U(\mathbb{Z}C_3) = \pm C_3$

Bewijs. Omdat $\mathbb{Z}C_3$ isomorf is met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$, bepalen we eerst de eenheden in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}(\omega))$.
Dus is $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega)) = \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm \omega), (\pm 1, \pm \omega^2)\}$. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten.
Dit zijn: $\{(1, 1), (1, \omega), (1, -1-\omega), (-1, -1), (-1, -\omega), (-1, 1+\omega)\}$. De overeenkomstige elementen in $\mathbb{Z}C_3$ zijn dan de eenheden in $\mathbb{Z}C_3$. Dit zijn de elementen $\pm 1, \pm g, \pm g^2$. □

Er zijn dus 6 elementen van $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega))$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}C_3)$. Dit zijn dan elementen van $U(H) \setminus \mathbb{Z}C_3$. Zo komt met $(1, -1)$ het element $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}g + \frac{2}{3}g^2$ overeen.