Hoofdstuk 3

Eenheden van $\mathbb{Z}C_4$

3.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}C_4$

Stel $C_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$ de cyclische groep van orde 4. Definieer vervolgens $\mathbb{Q}C_4 = \{a + bg + cg^2 + dg^3 : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}C_4, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

C_4 is een abelse groep met vier toevoegingsklassen en dus vier irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : C_4 \to \mathbb{Q} : g \mapsto 1 \\
&\rho_2 : C_4 \to \mathbb{Q} : g \mapsto -1 \\
&\rho_3 : C_4 \to \mathbb{Q}(i) : g \mapsto i \\
&\rho_4 : C_4 \to \mathbb{Q}(i) : g \mapsto -i
\end{aligned}$$

Hierbij is $i^2 = -1$ en $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \text{ met } a, b \in \mathbb{Q}\}$.
We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}C_4$:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : \mathbb{Q}C_4 \to \mathbb{Q} : a + bg + cg^2 + dg^3 \mapsto a + b + c + d \\
&\rho_2 : \mathbb{Q}C_4 \to \mathbb{Q} : a + bg + cg^2 + dg^3 \mapsto a - b + c - d \\
&\rho_3 : \mathbb{Q}C_4 \to \mathbb{Q}(i) : a + bg + cg^2 + dg^3 \mapsto (a - c) + (b - d)i \\
&\rho_4 : \mathbb{Q}C_4 \to \mathbb{Q}(i) : a + bg + cg^2 + dg^3 \mapsto (a - c) + (d - b)i
\end{aligned}$$

We definiëren tenslotte:

$$\begin{gathered}
\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) : \mathbb{Q}C_4 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) : \\
a + bg + cg^2 + dg^3 \mapsto (a + b + c + d, a - b + c - d, (a - c) + (b - d)i)
\end{gathered}$$

Als we het element $(a+b+c+d, a-b+c-d, (a-c)+(b-d)i)$ identificeren met $(a+b+c+d, a-b+c-d, a-c, b-d)$ kunnen we met de matrixnotatie werken:

$$\rho(a+bg+cg^2+dg^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Stelling 3.1. $\mathbb{Q}C_4 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i)$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

Bewijs. Omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3 lineaire uitbreidingen zijn, wordt de optelling en de vermenigvuldiging met rationale getallen behouden. Omdat ρ_1, ρ_2, ρ_3 groepshomomorfismen zijn, wordt ook de vermenigvuldiging behouden. Rest ons nog aan te tonen dat ρ bijectief is.
Veronderstel dat $u = a+bg+cg^2+dg^3$ en $v = x+yg+zg^2+tg^3$ en $\rho(u) = \rho(v)$, dan is

$$\begin{cases} a+b+c+d = x+y+z+t \\ a-b+c-d = x-y+z-t \\ a-c = x-z \\ b-d = y-t \end{cases}$$

Uit vergelijking 3 en 4 vinden we dat $a = c+x-z$ en $b = d+y-t$. Als we dit invullen in de eerste vergelijking verkrijgen we: $c+d = z+t$.
In de tweede vergelijking vinden we dan $c-d = z-t$. En dus is ook $c = z$ en $d = t$. Bijgevolg is $a = x$, $b = y$ en is ρ injectief.
Neem $(x, y, z+ti)$ een willekeurig element uit $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i)$. Construeer $h = \frac{1}{4}(x+y+2z) + \frac{1}{4}(x-y+2t)g + \frac{1}{4}(x+y-2z)g^2 + \frac{1}{4}(x-y-2t)g^3 \in \mathbb{Q}C_4$, dan is $\rho(h) = (x, y, z+ti)$ en dus is ρ surjectief. □

3.2 De groepsring $\mathbb{Z}C_4$

De groep der gehelen van $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}(i)$ is $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}C_4$ noteren we met H. Het is duidelijk dat, via ρ, geldt dat $H \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)$. Elk element van de $\mathbb{Z}$-algebra $\mathbb{Z}C_4$ wordt door ρ afgebeeld in $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)$. Dus $\mathbb{Z}C_4 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}C_4$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{4}(1+g+g^2+g^3) \in \mathbb{Q}C_4$ en $\rho(x) = (1, 0, 0) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)$. Bijgevolg is $x \in H \setminus \mathbb{Z}C_4$. We vragen ons af welke deel van $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)$ overeenkomt met $\mathbb{Z}C_4$.

Stelling 3.2. $\mathbb{Z}C_4 \cong \{(a, b, c + di) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) : a + b \equiv 2c \; mod \; 4 \; en \; a - b \equiv 2d \; mod \; 4\}$

Bewijs. Noteer $\rho(\mathbb{Z}C_4) = A$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
(x, y, z + ti) \in A \Longleftrightarrow & \exists a + bg + cg^2 + dg^3 \in \mathbb{Z}C_4 : \\
& \rho(a + bg + cg^2 + dg^3) = (x, y, z + ti) \\
\Longleftrightarrow & \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} x + y + 2z \equiv 0 \text{ mod } 4 \\ x - y + 2t \equiv 0 \text{ mod } 4 \\ x + y - 2z \equiv 0 \text{ mod } 4 \\ x - y - 2t \equiv 0 \text{ mod } 4 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} x + y \equiv 2z \text{ mod } 4 \\ x - y \equiv 2t \text{ mod } 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

3.3 Eenheden in $\mathbb{Z}C_4$

Stelling 3.3. *Alle eenheden van $\mathbb{Z}C_4$ zijn triviaal of $U(\mathbb{Z}C_4) = \pm C_4$*

Bewijs. Omdat $\mathbb{Z}C4$ isomorf is met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i)$, bepalen we eerst de eenheden in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i)$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i)) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}(i))$. Dus is $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i)) = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm i)\}$. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten. Dit zijn de elementen: $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, i), (1, -1, -i), (-1, 1, i), (-1, 1, -i), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\}$. De overeenkomstige elementen in $\mathbb{Z}C_4$ zijn dan de eenheden in $\mathbb{Z}C_4$. Dit zijn de elementen $\pm 1, \pm g, \pm g^2, \pm g^3$. □

Er zijn dus 8 elementen van $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i))$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}C_4)$. Dit zijn dan elementen van $U(H) \setminus \mathbb{Z}C_4$. Zo komt met $(1, 1, i)$ het element $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g^2 - \frac{1}{2}g^3$ overeen.