# Hoofdstuk 5

# Eenheden van $\mathbb{Z}C_5$

## 5.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}C_5$

Stel $C_5 = \{1, g, g^2, g^3, g^4\}$ de cyclische groep van orde 5. Definieer vervolgens $\mathbb{Q}C_5 = \{a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 : a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}C_5, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

$C_5$ is een abelse groep met vijf toevoegingsklassen en dus vijf irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : C_5 \to \mathbb{Q} : g \mapsto 1\\
&\rho_2 : C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : g \mapsto \epsilon_5\\
&\rho_3 : C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : g \mapsto \epsilon_5^2\\
&\rho_4 : C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : g \mapsto \epsilon_5^3\\
&\rho_5 : C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : g \mapsto \epsilon_5^4
\end{aligned}$$

Hierbij is $\epsilon_5^5 = 1$ of $\epsilon_5^4 = -\epsilon_5^3 - \epsilon_5^2 - \epsilon_5 - 1$.
Bovendien is $\mathbb{Q}(\epsilon_5) = \{a + b\epsilon_5 + c\epsilon_5^2 + d\epsilon_5^3 \text{ met } a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.
We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}C_5$ :

$$\rho_1 : \mathbb{Q}C_5 \to \mathbb{Q} : a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 \mapsto a + b + c + d + e$$

$$\rho_2 : \mathbb{Q}C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : a+bg+cg^2+dg^3+eg^4 \mapsto (a-e)+(b-e)\epsilon_5+(c-e)\epsilon_5^2+(d-e)\epsilon_5^3$$

$$\rho_3 : \mathbb{Q}C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : a+bg+cg^2+dg^3+eg^4 \mapsto (a-c)+(d-c)\epsilon_5+(b-c)\epsilon_5^2+(e-c)\epsilon_5^3$$

$$\rho_4 : \mathbb{Q}C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : a+bg+cg^2+dg^3+eg^4 \mapsto (a-d)+(c-d)\epsilon_5+(e-d)\epsilon_5^2+(b-d)\epsilon_5^3$$

$$\rho_5 : \mathbb{Q}C_5 \to \mathbb{Q}(\epsilon_5) : a+bg+cg^2+dg^3+eg^4 \mapsto (a-b)+(e-b)\epsilon_5+(d-b)\epsilon_5^2+(c-b)\epsilon_5^3$$

We definiëren tenslotte:

$$\rho = (\rho_1, \rho_2) : \mathbb{Q}C_5 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_5) :$$
$$a+bg+cg^2+dg^3+eg^4 \mapsto (a+b+c+d, a-e+(b-e)\epsilon_5+(c-e)\epsilon_5^2+(d-e)\epsilon_5^3)$$

Als we het element $(a+b+c+d, a-e+(b-e)\epsilon_5+(c-e)\epsilon_5^2+(d-e)\epsilon_5^3)$ identificeren met $(a+b+c+d, a-e, b-e, c-e, d-e)$ kunnen we met de matrixnotatie werken:

$$\rho(a+bg+cg^2+dg^3+eg^4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

**Stelling 5.1.** $\mathbb{Q}C_5 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_5)$ *als* $\mathbb{Q}$-*algebra*

*Bewijs.* Omdat $\rho_1, \rho_2$ lineaire uitbreidingen zijn, wordt de optelling en de vermenigvuldiging met rationale getallen behouden. Omdat $\rho_1, \rho_2$ groepshomomorfismen zijn, wordt ook de vermenigvuldiging behouden. Rest ons nog aan te tonen dat $\rho$ bijectief is.
Veronderstel dat $k = a+bg+cg^2+dg^3+eg^4$ en $l = x+yg+zg^2+tg^3+ug^4$ en $\rho(k) = \rho(l)$, dan is

$$\begin{cases} a+b+c+d+e = x+y+z+t+u \\ a-e = x-u \\ b-e = y-u \\ c-e = z-u \\ d-e = t-u \end{cases}$$

Als we vergelijkingen 2,3,4 en 5 aftrekken van 1 vinden we dat $a = x$ . Als we dit invullen in de tweede vergelijking verkrijgen we: $e = u$.
Dit invullen in de andere vergelijkingen geeft $b = y$, $c = z$ en $d = t$. Bijgevolg is $k = l$ en is $\rho$ injectief.
Neem $(a, b+c\epsilon_5+d\epsilon_5^2+e\epsilon_5^3)$ een willekeurig element uit $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}(\epsilon_5)$. Construeer $x = \frac{1}{5}(a+4b-c-d-e) + \frac{1}{5}(a-b+4c-d-e)g + \frac{1}{5}(a-b-c+4d-e)g^2 + \frac{1}{5}(a-b-c-d+4e)g^3 + \frac{1}{5}(a-b-c-d-e)g^4 \in \mathbb{Q}C_5$, dan is $\rho(x) = (a, b+c\epsilon_5+d\epsilon_5^2+e\epsilon_5^3)$ en dus is $\rho$ surjectief. □

## 5.2 De groepsring $\mathbb{Z}C_5$

De groep der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_5)$ is $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}C_5$ noteren we met $H$. Het is duidelijk dat, via $\rho$, geldt dat $H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$. Elk element van de $\mathbb{Z}$-algebra $\mathbb{Z}C_5$ wordt door $\rho$ afgebeeld in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$. Dus $\mathbb{Z}C_5 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van $H$ die niet in $\mathbb{Z}C_5$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{5}(1 + g + g^2 + g^3 + g^4) \in \mathbb{Q}C_5$ en $\rho(x) = (1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$. Bijgevolg is $x \in H \setminus \mathbb{Z}C_5$. We vragen ons af welke deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$ overeenkomt met $\mathbb{Z}C_5$.

**Stelling 5.2.** $\mathbb{Z}C_5 \cong \{(a, b + c\epsilon_5 + d\epsilon_5^2 + e\epsilon_5^3) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5) :$
$a \equiv b + c + d + e \ mod\ 5\}$

*Bewijs.* Noteer $\rho(\mathbb{Z}C_5) = A$. Dan geldt:(x,y+z$\epsilon_5 + t\epsilon_5^2 + u\epsilon_5^3) \in A$

$$\iff \exists a, b, \cdots, e \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$$
$$\iff \exists a, b, \cdots, e \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$$
$$\iff x - y - z - t - u \equiv 0 \bmod 5$$
$$\iff x \equiv y + z + t + u \bmod 5$$

□

## 5.3 Eenheden in $\mathbb{Z}C_5$

In tegenstelling tot de vorige voorbeelden zijn de eenheden in $\mathbb{Z}(\epsilon_5)$ niet allemaal triviaal. Er zijn $\frac{\phi(5)}{2} - 1 = 1$ fundamentele eenheden. Deze is van de vorm $\dfrac{\epsilon_5^a - 1}{\epsilon_5 - 1}$ met $1 < a < \dfrac{5}{2}$ en a en 5 onderling ondeelbaar. Dus moet $a = 2$ en krijg je als fundanmentele eenheid $\epsilon_5 + 1$.
Bijgevolg is $U(\mathbb{Z}(\epsilon_5)) = \{\pm\epsilon_5^n(1 + \epsilon_5)^m\}$.

**Stelling 5.3.** $U(\mathbb{Z}C_5) = \pm C_5. \langle 1 - g^2 - g^3 \rangle$

*Bewijs.* Omdat $\mathbb{Z}C_5$ isomorf is met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$, bepalen we eerst de eenheden in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}(\epsilon_5))$.
Dus $(x, y + z\epsilon_5 + t\epsilon_5^2 + u\epsilon_5^3) \in U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5))$ als $x = \pm 1$ en $y + z\epsilon_5 + t\epsilon_5^2 + u\epsilon_5^3 = \pm\epsilon_5^n(1 + \epsilon_5)^m$. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten. Als we in vorige gelijkheid overal $\epsilon_5$ vervangen door 1, dan vinden we dat $y + z + t + u = \pm 2^m$. Als $x \equiv y + z + t + u \mod 5$, dan moet $2^m \equiv \pm 1 \mod 5$. Bijgevolg moet m even zijn.
Dan is $A \cap U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_5)) = \{\pm 1, \pm\epsilon_5^n(1 + \epsilon)^{2k}\} = \{\pm 1, \pm\epsilon_5^n(1 + 2\epsilon + \epsilon_5^2)^k\}$. Dit kan je herschrijven als $\{(\pm 1, \pm\epsilon_5^n).(\pm 1, (1 + 2\epsilon_5 + \epsilon_5^2)^k)\}$. Bijgevolg is $U(\mathbb{Z}C_5) = \pm C_5. \langle g - g^3 - g^4 \rangle = \pm C_5. \langle 1 - g^2 - g^3 \rangle$. $\square$