Hoofdstuk 6

Eenheden van $\mathbb{Z}C_6$

6.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}C_6$

Stel $C_6 = \{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$ de cyclische groep van orde 6. Definieer dan $\mathbb{Q}C_6 = \{a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5 : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}C_6, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

C_6 is een abelse groep met zes toevoegingsklassen en dus zes irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : C_6 \to \mathbb{Q} : g \mapsto 1\\
&\rho_2 : C_6 \to \mathbb{Q} : g \mapsto -1\\
&\rho_3 : C_6 \to \mathbb{Q}(\omega) : g \mapsto \omega\\
&\rho_4 : C_6 \to \mathbb{Q}(\omega) : g \mapsto \omega^2\\
&\rho_5 : C_6 \to \mathbb{Q}(\omega) : g \mapsto -\omega\\
&\rho_6 : C_6 \to \mathbb{Q}(\omega) : g \mapsto -\omega^2
\end{aligned}$$

Hierbij is $\omega^3 = 1$ of $\omega^2 = -\omega - 1$. Bovendien is $\mathbb{Q}(\omega) = \{a + b\omega \text{ met } a, b \in \mathbb{Q}\}$.
We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}C_6$:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : \mathbb{Q}C_6 \to \mathbb{Q} : a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5 \mapsto a + b + c + d + e + f\\
&\rho_2 : \mathbb{Q}C_6 \to \mathbb{Q} : a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5 \mapsto a - b + c - d + e - f\\
&\rho_3 : \mathbb{Q}C_6 \to \mathbb{Q}(\omega) : a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5 \mapsto (a + d - c - f) + (b + e - c - f)\omega\\
&\rho_5 : \mathbb{Q}C_6 \to \mathbb{Q}(\omega) : a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5 \mapsto (a - d - c + f) + (-b + e - c + f)\omega
\end{aligned}$$

We definiëren tenslotte:

$$\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_5) : \mathbb{Q}C_6 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega) \oplus \mathbb{Q}(\omega) :$$
$a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5 \mapsto (a + b + c + d + e + f, a - b + c - d + e - f, (a + d - c - f) + (b + e - c - f)\omega), (a - d - c + f) + (-b + e - c + f)\omega)$

Als we het element $a+bg+cg^2+dg^3+eg^4+fg^5 \mapsto (a+b+c+d+e+f, a-b+c-d+e-f, (a+d-c-f)+(b+e-c-f)\omega), (a-d-c+f)+(-b+e-c+f)\omega)$ identificeren met $(a + b + c + d + e + f, a - b + c - d + e - f, a + d - c - f, b+e-c-f, a-d-c+f, -b+e-c+f)$ kunnen we met de matrixnotatie werken:

$$\rho(a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Stelling 6.1. $\mathbb{Q}C_5 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega) \oplus \mathbb{Q}(\omega)$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

Bewijs. Omdat $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_5$ lineaire uitbreidingen zijn, wordt de optelling en de vermenigvuldiging met rationale getallen behouden. Omdat $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_5$ groepshomomorfismen zijn, wordt ook de vermenigvuldiging behouden. Rest ons nog aan te tonen dat ρ bijectief is.
Veronderstel dat $k = a + bg + cg^2 + dg^3 + eg^4 + fg^5$ en $l = x + yg + zg^2 + tg^3 + ug^4 + vg^5$ en $\rho(k) = \rho(l)$, dan is

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f = x + y + z + t + u + v \\ a - b + c - d + e - f = x - y + z - t + u - v \\ a + d - c - f = x + t - z - v \\ b + e - c - f = y + u - z - v \\ a - d - c + f = x - t - z + v \\ -b + e - c + f = -y + u - z + v \end{cases}$$

Door vergelijkingen op te tellen of van elkaar af te trekken is dit stelsel equivalent met:

$$\begin{cases} a + c + e = x + z + u \\ b + d + f = y + t + v \\ a - c = x - z \\ d - f = t - v \\ e - c = u - z \\ b - f = y - v \end{cases}$$

Uit vergelijking 3 halen we a en uit vergelijking 5 halen we e. Invullen in vergelijking 1 geeft $c = z$. Op de zelfde manier vinden we dat $a = x$, $b = y$, $d = t$, $e = u$ en $f = v$. Bijgevolg is $k = l$ en is ρ injectief.
Neem $(a, b, c + d\omega, e + f\omega)$ een willekeurig element uit $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega) \oplus \mathbb{Q}(\omega)$. Construeer $x = \frac{1}{6}(a + b + 2c - d + 2e - f) + \frac{1}{6}(2a - 2b - 2c + d + 2e - f)g + \frac{1}{6}(2b - 2e - 2f)g^2 + \frac{1}{6}(a - b + 2c - d - 2e + f)g^3 + \frac{1}{6}(2b + 3d - 2e + f)g^5 + \frac{1}{6}(2a - 2b - 2c - 2d + 2e + 2f)g^5 \in \mathbb{Q}C_6$, dan is $\rho(x) = (a, b, c + d\omega, e + f\omega)$ en dus is ρ surjectief. $\square$

6.2 De groepsring $\mathbb{Z}C_6$

De groep der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega) \oplus \mathbb{Q}(\omega)$ is $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega) \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}C_6$ noteren we met H. Het is duidelijk dat, via ρ, geldt dat $H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega) \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. Elk element van de $\mathbb{Z}$-algebra $\mathbb{Z}C_6$ wordt door ρ afgebeeld in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\omega) \oplus \mathbb{Z}(\omega)$. Dus $\mathbb{Z}C_6 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}C_6$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{6}(1+g+g^2+g^3+g^4+g^5) \in \mathbb{Q}C_6$ en $\rho(x) = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\omega)\oplus\mathbb{Z}(\omega)$. Bijgevolg is $x \in H\backslash\mathbb{Z}C_6$. We vragen ons af welke deel van $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\omega)\oplus\mathbb{Z}(\omega)$ overeenkomt met $\mathbb{Z}C_6$.

Stelling 6.2. $\mathbb{Z}C_6 \cong \cup A_{ij}$ *met* $i \in \{0, 1, 2\}$ *en* $j \in \{0, 1\}$ *en* $A_{ij} = \{(x, y, z + t\omega, u + v\omega) \equiv (-3u + v - 2z + 2i - 3j, u + v + 3j, z + (v + 2i)\omega, u + v\omega) \ mod\ 6\}$

Bewijs. Noteer $\rho(\mathbb{Z}C_6) = A$. Dan geldt:(x,y,z+tω, $u + v\omega) \in A$:

$$\iff \exists a, b, \cdots, f \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, b, \cdots, f \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z-t+2u-v \equiv 0 \bmod 6 \\ 2y-2u-2v \equiv 0 \bmod 6 \\ 3t-3v \equiv 0 \bmod 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z-t+2u-v \equiv 0 \bmod 6 \\ y-u-v \equiv 0 \text{ of } 1 \text{ of } 3 \bmod 6 \\ t-v \equiv 0 \text{ of } 2 \text{ of } 4 \bmod 6 \end{cases}$$

Dus $t \equiv v+2i \bmod 6$ met $i \in \{0,1,2\}$ en $y \equiv u+v+3j \bmod 6$ met $j \in \{0,1\}$. Uit de eerste vergelijking volgt dan dat $x \equiv -3u+v-2z+2i-3j \bmod 6$. Hieruit volgt het gestelde. □

6.3 Eenheden in $\mathbb{Z}C_6$

Stelling 6.3. *Alle eenheden van $\mathbb{Z}C_6$ zijn triviaal of $U(\mathbb{Z}C_6) = \pm C_6$*

Bewijs. Omdat $\mathbb{Z}C_6$ isomorf is met een deel van $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\omega)\oplus\mathbb{Z}(\omega)$, bepalen we eerst de eenheden in $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\omega)\oplus\mathbb{Z}(\omega)$.
Nu geldt dat $U(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\omega)\oplus\mathbb{Z}(\omega)) = U(\mathbb{Z})\oplus U(\mathbb{Z})\oplus U(\mathbb{Z}(\omega))\oplus U(\mathbb{Z}(\omega))$. In het totaal hebben we 144 eenheden. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten. De elementen $\pm(1,1,1,1)$ behoren tot A_{00}. Hiermee corresponderen de eenheden ± 1. De elementen $\pm(1,1,1,1)$ behoren tot A_{00}. Hiermee corresponderen de eenheden ± 1. De elementen $\pm(1,-1,\omega,-\omega)$ behoren tot A_{10}. Hiermee corresponderen de eenheden $\pm g$. De elementen $\pm(1,1,\omega^2,\omega^2)$ behoren tot A_{01}. Hiermee corresponderen de eenheden $\pm g^2$. De elementen $\pm(1,-1,1,-1)$ behoren tot A_{00}. Hiermee corresponderen de eenheden $\pm g^3$. De elementen $\pm(1,1,\omega,\omega)$ behoren tot A_{00}. Hiermee corresponderen de eenheden $\pm g^4$. De elementen $\pm(1,-1,\omega^2,-\omega^2)$ behoren tot A_{12}. Hiermee corresponderen de eenheden $\pm g^5$. De andere elementen behoren niet tot $\cup A_{ij}$ en geven dus geen eenheden in $\mathbb{Z}C_6$. □

Er zijn dus 132 elementen van $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\omega)\oplus\mathbb{Z}(\omega)$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}C_6)$. Dit zijn dan elementen van $U(H)\setminus\mathbb{Z}C_6$. Zo komt met $(1,1,1,\omega)$ het element $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}g^3+\frac{1}{2}g^4$ overeen.