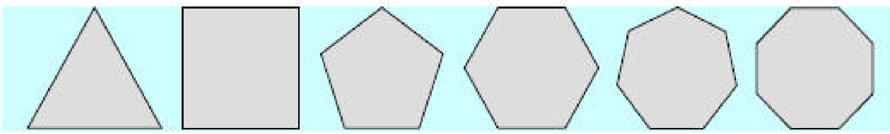
Regelmatige veelhoeken op volgorde

1 Het veelhoeken probleem

- Zes regelmatige veelhoeken zijn op volgorde in een band naast elkaar gezet, met een zijde op de onderkant. De bovenrand wordt beurtelings met een hoekpunt of met een hele zijde geraakt. Je zou kunnen zeggen dat de figuren dezelfde hoogte h hebben.



  We vragen ons af : in welke volgorde moeten alle regelmatige veelhoeken staan, gerangschikt naar hun oppervlakte?

- Sommige paren van regelmatige veelhoeken zijn *meetkundig* gemakkelijk te vergelijken, zoals driehoek en vierkant, vierkant en achthoek of driehoek en zeshoek, zodat je gemakkelijk de oppervlakte kan berekenen.

- Uit de hoogte h van de driehoek, kan je via de stelling van Pythagoras, afleiden dat de zijde gelijk is aan $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. De oppervlakte van de driehoek, in functie van h, is dan gegeven door $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$. De oppervlakte van de driehoek is dus $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$ keer de oppervlakte van het vierkant.

- Stel a de zijde van de achthoek dan is $a^2 = \left(\frac{h-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h-a}{2}\right)^2$, waaruit volgt dat $h = (\sqrt{2}+1)a$. De oppervlakte van de achthoek is $2(\sqrt{2}-1) \approx$ 0.8284 keer de oppervlakte van het vierkant.

- De oppervlakte van de driehoek $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$. De oppervlakte van de zeshoek is dan $\frac{\sqrt{3}h^2}{2}$. Zodat de oppervlakte van de zeshoek 1,5 keer de oppervlakte is van de driehoek of ongeveer $0,866$ keer de oppervlakte van het vierkant.

- Voorlopig krijgen we als rangschikking , van klein naar groot , driehoek, achthoek, zeshoek en vierkant.

- Maar nu wordt het moeilijker! Kunnen we geen algemene formule vinden voor de oppervlakte van een regelmatige veelhoek in die band?

2 Algemene formule voor de oppervlakte

- Het bestuderen van de verschillende veelhoeken leidt ons naar een onderverdeling in de veelhoeken met een even en een oneven aantal zijden. Noteren we met $f_{even}(n)$ de oppervlakte van een regelmatige n-veelhoek met een even aantal zijden, begrepen tussen een strook met hoogte h. Met $f_{oneven}(n)$ noteren de oppervlakte van een regelmatige n-veelhoek met een oneven aantal zijden, begrepen tussen een strook met hoogte h.

- **Stelling 2.1** $f_{even}(n) = \frac{1}{4}nh^2\tan(\frac{\pi}{n})$

  De oppervlakte wordt berekend door n keer de oppervlakte te nemen van een driehoek die aan de onderkant van de strook grenst. De hoogte van zo een driehoek is $\frac{h}{2}$. *De basis is de lengte van de zijde z van de regelmatige n-hoek. De tophoek van de driehoek bedraagt* $\frac{2\pi}{n}$, *zodat* $\tan(\frac{\pi}{n}) = \frac{z}{2} : \frac{h}{2}$.
  Dus $f_{even}(n) = n\left(\frac{1}{2}h\tan(\frac{\pi}{n})\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4}nh^2\tan(\frac{\pi}{n})$.

- Voorbeeld :

  1. $f_{even}(4) = 4.\frac{1}{4}h^2\tan(\frac{\pi}{4}) = h^2$
  2. $f_{even}(6) = 6.\frac{1}{4}h^2\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{h^2\sqrt{3}}{2} \approx 0.866h^2$
  3. $f_{even}(8) = 8.\frac{1}{4}h^2\tan(\frac{\pi}{8}) = 2h^2\tan\frac{\pi}{8} \approx 0.828h^2$

- **Stelling 2.2** $f_{oneven}(n) = \frac{1}{2}nh^2\Big(\tan(\frac{\pi}{2n}) - \tan^3(\frac{\pi}{2n})\Big)$

  De oppervlakte wordt berekend door n keer de oppervlakte te nemen van een driehoek die aan de onderkant van de strook grenst. De hoogte van deze driehoek is $x = h - r$, waar r de straal is van de omgeschreven cirkel van de regelmatige n-hoek. De basis is de lengte van de zijde z van de regelmatige n-hoek. Volgens de stelling van Pythagoras is $r^2 = x^2 + \frac{1}{4}z^2$ en bovendien geldt $\tan(\frac{\pi}{n}) = \frac{z}{2x}$. Als we z uit deze laatste formule halen en invullen in de vorige krijgen we : $r^2 = x^2 + x^2\tan^2(\frac{\pi}{n}) = \frac{x^2}{\cos^2(\frac{\pi}{n})}$. Bijgevolg is $r = \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{n})}$.
  Nu kunnen we x uitdrukken in functie van h, namelijk $r = h - x = \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{n})}$ of $x = \frac{h\cos(\frac{\pi}{n})}{1+\cos(\frac{\pi}{n})}$. De oppervlakte van de regelmatige n-hoek wordt nu gegeven door $f_{oneven}(n) = \frac{1}{2}n.x.z = nx^2\tan(\frac{\pi}{n}) = \frac{h^2\cos^2(\frac{\pi}{n})\tan(\frac{\pi}{n})}{(1+\cos(\frac{\pi}{n}))^2} =$
  $\frac{h^2\cos^2(\frac{\pi}{n})\tan(\frac{\pi}{n})}{(2\cos^2(\frac{\pi}{2n}))^2} = \frac{h^2\cos(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})}{4\cos^4(\frac{\pi}{2n})} = \frac{h^2\cos(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{2n})}{4\cos^3(\frac{\pi}{2n})} = \frac{h^2\Big(\cos^2(\frac{\pi}{2n})-\sin^2(\frac{\pi}{2n})\Big)\sin(\frac{\pi}{2n})}{4\cos^3(\frac{\pi}{2n})}$
  $= \frac{1}{2}nh^2\Big(\tan(\frac{\pi}{2n}) - \tan^3(\frac{\pi}{2n})\Big)$.

- Voorbeeld :

  1. $f_{oneven}(3) = \frac{1}{2}3h^2.\Big(\tan(\frac{\pi}{6}) - \tan^3(\frac{\pi}{6})\Big) = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2 \approx 0.577h^2$
  2. $f_{oneven}(5) = \frac{1}{2}5h^2.\Big(\tan(\frac{\pi}{10}) - \tan^3(\frac{\pi}{10})\Big) \approx 0.727h^2$
  3. $f_{oneven}(7) = \frac{1}{2}7h^2.\Big(\tan(\frac{\pi}{14}) - \tan^3(\frac{\pi}{14})\Big) \approx 0.757h^2$

3 Rangschikking

- We zijn nu klaar om via een paar stellingen de veelhoeken te rangschikken wat betreft hun oppervlakte.

- **Stelling 3.1** *De oppervlakte van even veelhoeken neemt af als n toeneemt*

  Het te bewijzen komt neer op het aantonen dat de rij $f_{even}(n)$ dalend is. De rij daalt als de overeenkomstige functie $f_{even}(x)$ een dalende functie is.
  $f'_{even}(x) = \Big(\frac{1}{4}xh^2\tan(\frac{\pi}{x})\Big)' = \frac{1}{4}h^2\frac{\sin(\frac{\pi}{x})\cos(\frac{\pi}{x})-\frac{\pi}{x}}{\cos^2(\frac{\pi}{n})}$.
  Het teken van de afgeleide functie wordt volledig bepaald door de uitdrukking $\sin(\frac{\pi}{x})\cos(\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{x}) - \frac{\pi}{x}$. Omdat voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$

geldt dat $\sin x < x < \tan x$, *zal deze uitdrukking steeds negatief zijn en dus is* $f_{even}(x)$ *een dalende functie.*

- **Stelling 3.2** *De oppervlakte van oneven veelhoeken neemt toe als n toeneemt*

  Het te bewijzen komt neer op het aantonen dat de rij $f_{oneven}(n)$ *stijgend is. De rij stijgt als de overeenkomstige functie* $f_{oneven}(x)$ *een stijgende functie is.*
  $f'_{oneven}(x) = [\frac{1}{2}xh^2\Big(\tan(\frac{\pi}{2x}) - \tan^3(\frac{\pi}{2x})\Big)]' = \frac{1}{2}h^2\Big(\tan(\frac{\pi}{2x}) - \tan^3(\frac{\pi}{2x}) - \frac{\pi}{2x}\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2x})}(1 - 3\tan^2(\frac{\pi}{2n}))\Big)$. *Stel* $t = \tan(\frac{\pi}{2x})$. *Omdat voor* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *geldt dat* $\sin x < x < \tan x$ *geldt dat* $t > \frac{\pi}{2x}$. *Dan is* $f'_{oneven}(x) = \frac{1}{2}h^2(t - t^3 - \frac{\pi}{2x}(t^2+1)(1-3t^2) > t - t^3 - t(t^2+1)(1-3t^2) = t^3(1+3t^2) > 0$.
  Bijgevolg is $f_{oneven}(x)$ *een stijgende functie.*

- De rij $f_{even}(n)$ is een dalende naar onder begrensde rij in $\mathbb{R}$ en heeft dus een limiet. Evenzo is $f_{oneven}(n)$ een stijgende naar boven begrensde rij n $\mathbb{R}$ en heeft dus ook een limiet. We gaan nu aantonen dat deze 2 limieten dezelfde zijn en dat dit de oppervlakte is van de cirkel die je tussen die strook kan tekenen : $\pi(\frac{h}{2})^2$.

- **Stelling 3.3** $lim_{n\to\infty} f_{even}(n) = \frac{\pi h^2}{4}$

  $lim_{n\to\infty} f_{even}(n) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}nh^2\tan(\frac{\pi}{n}) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\pi h^2\frac{\tan(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi h^2}{4}$.

- **Stelling 3.4** $lim_{n\to\infty} f_{oneven}(n) = \frac{\pi h^2}{4}$

  $lim_{n\to\infty} f_{oneven}(n) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}nh^2\Big(\tan(\frac{\pi}{2n}) - \tan^3(\frac{\pi}{2n})\Big)$
  $= lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\pi h^2\frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}}.lim_{n\to\infty}(1 - \tan^2(\frac{\pi}{2n})) = \frac{\pi h^2}{4}(1-0) = \frac{\pi h^2}{4}$.

- Een verrassend resultaat! De juiste volgorde is dus : driehoek, vijfhoek, zevenhoek, negenhoek,...,cirkel,...tienhoek, achthoek, zeshoek, vierkant.