Lights Out

1 Inleiding

Het spel Lights Out is een elektronisch spel dat gelanceerd werd in 1995 door Tiger Electronics. Het originele spel heeft een bord met 25 lampjes in een rooster van 5 rijen en 5 kolommen. Voor ons bestaat het spel uit een bord met m.n lampjes in een rooster van m rijen en n kolommen. In de startsituatie zijn sommige lampjes aan. Het doel van Lights Out is, zoals de naam al zegt, om alle lampjes uit te krijgen. Je kunt lampjes aanklikken (het zijn eigenlijk knopjes met een lampje erin). Als je een lampje aanklikt schakel je het lampje om (dus: als het lampje aan was gaat het uit, en als het lampje uit was gaat het aan). Er is een belangrijke toevoeging: als je een lampje omschakelt door het aan te klikken, schakel je ook de directe buren (links, rechts, boven en onder) van dat lampje om.

Je kan een lampje voorstellen door een element van $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Als het licht aan is noteren we een 1 en wanneer er een 0 staat is het licht uit. Het doel van het spel is om alle lichten uit te krijgen of anders gezegd in elk vakje een 0 te krijgen. Bij het aanklikken van een lamp wordt bij elke directe buur 1 bijgeteld. Alzo wordt een 0 een 1 en een 1 wordt 0.

We leggen nu een aantal begrippen en notaties uit die in het verder onderzoek zullen gebruikt worden.

- Een klik op het lampje op de i-de rij en j-de kolom noteren we met K_{ij}.
- Een *klikserie* is het uitvoeren van meerdere klikken: bijvoorbeeld $K_{11}K_{13}K_{22}$.
- Een *configuratie* is een mogelijke verdeling van de lampjes in aan of uit toestand. Een configuratie kan worden voorgesteld door een mxn matrix met elementen in $\mathbb{Z}_2$.
- Een configuratie met enkel nullen noemen we een *nulconfiguratie* en een configuratie met enkel enen noemen we een *éénconfiguratie*.

- Een configuratie heet *oplosbaar* als na het uitvoeren van een aantal zetten de nulconfiguratie kan worden bereikt.
- Een *elementaire klikmatrix* , horend bij een bepaalde klik, is een mxn matrix met enen op de plaats waar de lampjes worden omgeschakeld door die klik en voor de rest allemaal nullen.
- Bij een klikserie kunnen we de overeenkomstige elementaire klikmatrices optellen. Het optellen gebeurt modulo 2. De bekomen matrix noemen we het *schakelschema* horend bij de gegeven klikserie. Het effect van een klikserie op een bepaalde configuratie vinden we dan door het schakelschema op te tellen bij de configuratiematrix. Ook hier werken we modulo 2.
- Een schakelschema geeft dus aan welke lampjes worden omgeschakeld.
- Een *stille klikserie* is een serie klikken waarbij de eindconfiguratie gelijk is aan de beginconfiguratie. Het schakelschema van een stille klikserie is de nulmatrix. Niet klikken is ook een stille klikserie; we spreken van een triviale stille klikserie.
- Sommige klikschema's hebben eenzelfde schakelschema. We noemen dit *gelijkwerkende klikschema's* .
- In de verzameling van alle configuraties op een mxn bord kunnen we een relatie definieren: een configuratie C_1 is *verbonden* met een configuratie C_2 als er een klikserie bestaat die C_1 op C_2 brengt of met andere woorden als er een schakelschema M bestaat zodat $C_2 = C_1 + M$.

In de rest van dit verslag onderzoeken we welke configuraties op een willekeurig bord oplosbaar zijn. Maar eerst geven we een aantal zeer eenvoudige eigenschappen:

Stelling 1.1. *De volgorde bij het klikken is onbelangrijk.*

Bewijs. Bij elke klik hoort een elementaire klikmatrix. Om de klikserie uit te voeren moeten we alle elementaire klikmatrices optellen. Maar de optelling bij matrices is commutatief, dus is de volgorde van het klikken inderdaad onbelangrijk. □

Stelling 1.2. *Dubbelklikken mag je verwijderen uit een klikschema.*

Bewijs. Bij de som van de elementaire klikmatrices, horend bij de gegeven klikserie, krijg je twee maal dezelfde matrix. Omdat we modulo 2 werken is de som van dergelijke matrix en zichzelf gelijk aan de nulmatrix en die mag gewoon weggelaten worden in de som, omdat die nulmatrix het neutraal element is voor de optelling van matrices. □

2 Een voorbeeld: Lights Out op een 1x2 bord

- Er zijn 2 vakjes, waar je telkens een 0 of een 1 kan plaatsen: dus zijn er $2^2 = 4$ mogelijke beginconfiguraties: $(0,0), (1,0), (0,1)$ en $(1,1)$.

- Omdat er maar 1 rij is noteren we de klik op de i-de kolom met K_i. Niet klikken noteren we door K_0.

- In onderstaande tabel geven we alle mogelijke klikseries met het bijbehorende schakelschema:

klikserie	schakelschema
K_0	$(0,0)$
K_1	$(1,1)$
K_2	$(1,1)$
K_1K_2	$(0,0)$

- We merken op dat er evenveel klikseries zijn als configuraties, maar dat er minder schakelschema's zijn. Sommige klikseries hebben hetzelfde effect op de beginconfiguratie omdat ze hetzelfde schakelschema hebben.

- K_1K_2 is een niet-triviale stille klikserie.

- De relatie: $\cdots$ is verbonden met $\cdots$ verdeelt de verzameling van alle configuraties in twee klassen: $\{(0,0),(1,1)\}$ en $\{(1,0),(0,1)\}$.

- De oplosbare configuraties zijn $(0,0)$ en $(1,1)$ door bijvoorbeeld de klik K_1.

- 50% van de configuraties is oplosbaar.

- Alle oplosbare configuraties zitten in dezelfde klasse bepaald door de relatie:$\cdots$ is verbonden met $\cdots$.

- De verzameling klikseries wordt ook in twee klassen verdeeld door de relatie:$\cdots$ is gelijkwerkend met $\cdots$. De klassen zijn $\{K_0, K_1K_2\}$ en $\{K_1, K_2\}$.

3 Algemene stellingen

We proberen een aantal waarnemingen die we gedaan hebben in het vorige voorbeeld te veralgemenen.

Stelling 3.1. *Op een mxn bord zijn er 2^{mn} configuraties mogelijk.*

Bewijs. Er zijn $m.n$ vakjes en elk vakje kan een 0 of een 1 bevatten, dus zijn er 2^{mn} mogelijkheden om het bord op te vullen met nullen of enen. □

Stelling 3.2. *Er zijn evenveel configuraties als er klikschema's zijn.*

Bewijs. Gegeven een configuratie C. Met een 1 op de i-de rij en j-de kolom in de configuratie laten we de klik K_{ij} overeenkomen. Zo komt met elke configuratie juist 1 klikserie overeen. Omgekeerd bij een gegeven klikserie laten we de configuratie overeenkomen met enen op de plaats van de klikken. Bijgevolg is er een bijectief verband tussen de verzameling configuraties en de verzameling klikschema's. Hieruit volgt het gevraagde.

□

Stelling 3.3. *Er zijn minder schakelschema's als configuraties.*

Bewijs. Twee of meer verschillende configuraties of klikschema's kunnen hetzelfde schakelschema bepalen. Kijk hiervoor maar naar het voorbeeld in vorige sectie. Dus zijn er minder schakelschema's dan configuraties. □

Het begrip *equivalentierelatie* is een zeer belangrijk begrip in de wiskunde. Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief (elk element staat in relatie tot zichzelf), symmetrisch (als a in relatie staat met b, dan staat b ook in relatie met a) en transitief (als a in relatie staat met b en b staat in relatie met c, dan staat a ook in relatie met c) is.
Een equivalentierelatie verdeelt de gegeven verzameling onder in klassen van elementen die onderling in relatie staan met elkaar. Die klassen vormen een partitie van de gegeven verzameling. Met ander woorden de klassen hebben onderling geen elementen gemeenschappelijk en vormen samen de hele verzameling.

Stelling 3.4. *De relatie $\cdots$ is verbonden met $\cdots$ in de verzameling configuraties van een mxn bord is een equivalentierelatie.*

Bewijs. We tonen aan dat de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is.

- De relatie is reflexief: stel C een configuratie, dan is $C = C + O$ waarbij O het schakelschema is horend bij niet klikken. Dus is C verbonden met zichzelf.

- De relatie is symmetrisch: Stel dat de configuratie C_1 verbonden is met de configuratie C_2, dan bestaat er een schakelschema M zodat $C_2 = C_1 + M$. Maar dan is $C_1 = C_2 - M = C_2 + M$. Vergeet hierbij niet dat we in $\mathbb{Z}_2$ werken. Bijgevolg is ook C_2 verbonden met C_1.

- De relatie is transitief: Stel dat C_1 verbonden is met C_2 en C_2 verbonden is met C_3, dan bestaan er schakelschema's M en N zodat $C_2 = C_1 + M$ en $C_3 = C_2 + N$. Maar dan is $C_3 = C_1 + M + N$. Omdat de som van twee schakelschema's terug een schakelschema is, volgt hieruit dat C_1 verbonden is met C_3.

$\square$

De relatie $\cdots$ is verbonden met $\cdots$ verdeelt de verzameling van alle mogelijke configuraties in klassen die onderling disjunct zijn. We spreken van *configuratieklassen*.

Stelling 3.5. *Het aantal elementen is een klasse van de relatie $\cdots$ is verbonden met $\cdots$ is gelijk aan het aantal schakelschema's.*

Bewijs. Een configuratie C_1 is verbonden met een andere configuratie C_2 als er een schakelschema M bestaat zodat $C_2 = C_1 + M$. Er zij dus evenveel configuraties verbonden met C_1 als er schakelschema's bestaan. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

Stelling 3.6. *Het aantal configuratieklassen en het aantal schakelschema's is steeds een macht van 2.*

Bewijs. Elke configuratieklasse bevat evenveel elementen als er schakelschema's zijn. Dus op een mxn bord is het product van het aantal configuratieklassen met het aantal schakelschema's gelijk aan 2^{mn}. Dus moeten zowel het aantal configuratieklassen als het aantal schakelschema's een macht van 2 zijn. $\square$

Stelling 3.7. *De relatie $\cdots$ is gelijkwerkend met $\cdots$ in de verzameling klikseries is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Een klikserie is gelijkwerkend met zichzelf. De relatie is dus reflexief. Als K een klikserie is dat gelijkwerkend is met het klikserie L dan heeft K hetzelfde schakelschema als L en dus heeft ook L hetzelfde schakelschema als K. De relatie is dan symmetrisch. Als nu K gelijkwerkend is met L en L gelijkwerkend met M, dan hebben K en L hetzelfde schakelschema en ook L en M hebben hetzelfde schakelschema. Maar dan is het schakelschema van K en M ook hetzelfde en zijn K en M gelijkwerkend. De relatie is bijgevolg ook transitief en is dus een equivalentierelatie. □

Stelling 3.8. *Een configuratie is oplosbaar als hij verkregen kan worden door een klikschema uit te voeren op de nulconfiguratie.*

Bewijs. Gegeven is een klikserie met bijbehorend schakelschema M. Stel C de eindconfiguratie van het gegeven klikschema op de nulconfiguratie, dus $O+M = C$. Dan is $O = C-M = C+M$ en dus is C oplosbaar, want door de klikserie, die hoort bij M, toe te passen op C bekomt men de nulconfiguratie. □

Stelling 3.9. *Alle oplosbare configuraties zitten in één configuratieklasse. Het aantal oplosbare configuraties is gelijk aan het aantal schakelschema's en is dus een macht van 2.*

Bewijs. Als C_1 en C_2 oplosbaar zijn, dan bestaan er schakelschema's M en N met $C_1 + M = O$ en $C_2 + N = O$. Maar dan is $C_2 = C_1 + M - N = C_1 + M + N$. Bijgevolg zijn C_1 en C_2 verbonden met elkaar en zitten dus in dezelfde configuratieklasse. De rest volgt uit de vorige stellingen. □

4 Configuraties op 1xn borden

In deze sectie willen we onderzoeken welke configuraties op een 1xn bord oplosbaar zijn. Eerst willen we weten hoeveel stille klikseries er mogelijk zijn.

Stelling 4.1. *Als $n = 3k$ of $n = 3k + 1$ zijn er geen niet-triviale stille klikseries. Als $n = 3k + 2$ is er 1 niet-triviale stille klikserie.*

Bewijs. De klikken K_1 en K_n hebben 2 enen in hun elementaire klikmatrix. Elke andere klik heeft 3 enen in hun elementaire klikmatrix. Bij een stille klikserie moet het schakelschema bestaan uit enkel nullen, dus de som van het aantal enen in alle elementaire klikmatrices moet even zijn. Omdat klikken niet herhaald worden, zijn er dus 2n enen. Het schakelschema van een willekeurige klikserie is $x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_nE_n$. Hierbij is E_i de elementaire klikmatrix horend bij klik K_i en zijn de getallen x_i gelijk aan 0 of 1. Het aantal enen in het schakelschema is $2x_1 + 3x_2 + \cdots + 3x_{n-1} + 2x_n$. Dus $2n = 2x_1+3x_2+\cdots+3x_{n-1}+2x_n$ of $2n-2x_1-2x_n = 3(x_2+\cdots+x_{n-1})$. Als nu $n = 3k$, dan zal voor geen enkele waarde van x_1 en x_2 het linkerlid deelbaar zijn door 3. Idem als $n = 3k+1$. Enkel bij $n = 3k+2$ en $x_1 = x_2 = 1$ heb je een oplossing : $x_2 + \cdots + x_{n-1} = 2k$. Er is maar 1 oplossing. Want je moet K_1 en K_n zeker nemen, maar dan moet je ook K_2 en K_{n-1} nemen, anders krijg je geen 0 op de eerste en laatste plaats van het schakelschema. K_3 en K_{n-2} mag je niet nemen. K_4 en K_{n-3} daarentegen moet je wel nemen. Je kan zo verder gaan. Als k oneven is eindig je met $K_{\frac{n-3}{2}}K_{\frac{n+5}{2}}$ en $K_{\frac{n-1}{2}}K_{\frac{n+3}{2}}$. Als k even is eindig je met $K_{\frac{n}{2}}K_{\frac{n+2}{2}}$. Er is dus maar 1 oplossing mogelijk. □

Neem bijvoorbeeld een 1x5 bord. Dan is $K_1K_2K_4K_5$ een niet-triviale stille klikserie, want het schakelschema is $(11000) + (11100) + (00111) + (00011) = (00000)$.

Stelling 4.2. *Er zijn evenveel configuratieklassen als stille klikseries.*

Bewijs. Het aantal configuratieklassen vermenigvuldigd met het aantal schakelschema's is gelijk aan 2^n. In de verzameling van de klikschema's beschikken we over de equivalentierelatie: $\cdots$ is gelijkwerkend met $\cdots$. Het aantal elementen in een klasse is gelijk aan het aantal stille klikseries en het aantal klassen is gelijk aan het aantal schakelschema's. Dus is ook het product van het aantal stille klikschema's en het aantal schakelschema's gelijk aan 2^n. Als we de twee producten vergelijken zien we dat het aantal stille klikschema's gelijk is aan het aantal configuratieklassen. □

Stelling 4.3. *Als $n = 3k$ of $n = 3k+1$, dan is elke configuratie op een 1xn bord oplosbaar.*

Bewijs. We weten uit een vroeger resultaat dat in deze gevallen er geen niet-triviale stille klikschema's zijn. Dus is er maar 1 configuratieklasse en vermits alle oplosbare configuraties in 1 klasse zitten, zijn alle configuraties oplosbaar. □

Stelling 4.4. *Als $n = 3k + 2$ is 50% van de configuraties op een 1xn bord oplosbaar.*

Bewijs. In dit geval zijn er 2 stille klikschema's: niet klikken en de niet-triviale die we beschreven hebben in een vroeger resultaat. Er zijn dus 2 configuratieklassen met elk evenveel elementen. Eén van die klassen bevat de oplosbare configuraties. Met andere woorden de helft van alle configuraties is oplosbaar. □

We weten nu hoeveel configuraties oplosbaar zijn.Maar hoe kunnen we die configuraties dan oplossen?

Stelling 4.5. *Het klikschema K_iK_{i+1} doet het $i-1$ ste en $i+3$ de vakje omschakelen.*

Bewijs. De elementaire klikmatrix van K_i bevat enen op plaatsen $i-1, i$ en $i+1$. De elementaire klikmatrix van K_{i+1} bevat enen op de plaatsen $i, i+1$ en $i+2$. Het overeenkomstige schakelschema heeft een 1 op plaatsen $i-1$ en $i+2$ en voor de rest overal nullen. Als we bij een gegeven configuratie dit schakelschema optellen zal de inhoud van vakje $i-1$ en $i+2$ omgeschakeld worden. □

Met deze techniek kun je dus lampjes omschakelen die onderling op afstand 3 liggen. We kunnen van achter naar voor werken om alle vakjes, behalve de eerste 3, nul te maken. Neem bijvoorbeeld de configuatie (01001101) op een 1x8 bord. Met de klikserie K_6K_7 schakelen we vakjes 5 en 8 om en krijgen (01000100) We willen nu de 1 in vakje 6 wegwerken. Dat kan met het klikschema K_4K_5 en we verkrijgen dan (01100000). Deze configuratie is niet oplosbaar omdat we die laatste 2 enen niet meer wegkrijgen. De configuraties, die door toepassing van vorige techniek, eindigen met $(000), (111), (001)$ of (110) zullen oplosbaar zijn met respectievelijk de klikschema's K_0, K_2, K_1K_2 en K_1. De helft van alle gevallen is dus oplosbaar, een resultaat dat we in een vroegere stelling bewezen hebben. We eindigen met een resulaat voor éénconfiguraties.

Stelling 4.6. *Alle 1xn éénconfiguraties zijn oplosbaar.*

Bewijs. Als Als $n = 3k$ of $n = 3k+1$ weten we dat elke configuratie oplosbaar is , dus ook de éénconfiguratie. Maar we willen ook weten met hoeveel klikken we de configuratie kunnen oplossen. Als $n = 3k$ gebruiken we de klikserie

$K_2K_5 \cdots K_{n-1}$ Het bijhorende schakelschema bevat enkel enen. Opgeteld bij beginconfiguratie vinden we als eindconfiguratie de nulconfiguratie. Dus deze éénconfiguratie is oplosbaar met k klikken. Als $n = 3k + 1$ gebruiken we het klikschema $K_1K_4 \cdots K_n$ en we klaren de klus met $k+1$ klikken. Voor $n = 3k + 2$, gebruiken we de klikserie $K_1K - 4 \cdots K_{n-1}$ en we hebben dus $k + 1$ klikken nodig om de configuratie op te lossen. □

5 Een nieuw inzicht

Nemen we terug het 1x2 bord. De elementaire klikmatrix van K_1 is (11) en van K_2 is dat ook (11). Zetten we die twee rijmatices samen in 1 matrix A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Een willekeurig klikserie kunnen we voorstellen door $x = (x_1x_2)$ waarbij $x_i \in \mathbb{Z}_2$. Het matrixproduct Ax^t geeft dan het schakelschema van het klikschema x of de eindconfiguratie nadat we x hebben toegepast op de nulconfiguratie. Kunnen we dit nieuw inzicht gebruiken om te onderzoeken welk de oplosbare configuraties zijn en wat de stille klikschema's zijn?

De stille klikseries zijn de oplossingen van $Ax^t = 0$, waarbij 0 de 2x1 nulmatrix is. In ons (zeer eenvoudig) voorbeeld zijn de stille klikschema's de oplossingen van de vergelijking $x_1 + x_2 = 0$ en dat zijn $(0, 0)$ en $(1, 1)$. De stille klikseries zijn dus K_0 en K_1K_2. Dit is een bevestiging van een resultaat dat we reeds gevonden hebben in een vroegere sectie.

De oplosbare configuraties zijn de configuraties die je door een klikschema kunt krijgen vanaf de nulconfiguratie, m.a.w. alle mogelijke uitkomsten van Ax^t. We zoeken dus de *kolomruimte*, de verzameling lineaire combinaties van de kolomvectoren. In ons geval zijn dat alle veelvouden van $(1, 1)$, dus de configuraties (00) en (11).

Kunnen we dit nu ook doortrekken naar mxn borden? Proberen we eens met een 2x2 bord. We kunnen elke 2x2 matrix ook voorstellen door een 1x4 matrix, gevormd door de rijen van de gegeven 2x2 matrix achter elkaar te plaatsen. Zo wordt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ voorgesteld door (1101). Zo kunnen we de elementaire klikmatrices gaan voorstellen: K_1 geeft (1110), K_2 geeft (1101), K_3 geeft (1011) en tenslotte K_4 geeft (0111). De matrix A waarin we alle klikschema's bewaren is dan een 4x4 matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Een willekeurige klikserie stellen we voor door $x = (x_1 x_2 x_3 x_4)$. Door rijherleiding zien we dat de rang van deze matrix gelijk is aan 4, er zijn dus geen niet-triviale stille klikseries! Bijgevolg zijn alle configuraties oplosbaar.

Nog één voorbeeldje. Bestuderen we een 3x2 bord. De elementaire klikmatrices worden als volgt voorgesteld : $K_1 \to (111000)$, $K_2 \to (110100)$, $K_3 \to (101110)$, $K_4 \to (011101)$, $K_5 \to (001011)$ en $K_6 \to (000111)$. Samen in 1 matrix geeft dit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na rij herleiden wordt dit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De stille klikschema's zijn de oplossingen van het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

Er zijn 4 hoofdonbekenden en 2 nevenonbekenden x_5 en x_6 die je vrij mag kiezen uit $\{0, 1\}$. Dit geeft

x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Vertaald zijn dus $K_0, K_1K_3K_4K_5$, $K_2K_3K_4K_6$ en $K_1K_2K_5K_6$ de 4 stille klikschema's. Er zijn dus 4 configuratieklassen, elk met 16 configuraties. Er zijn 25% oplosbare configuraties.

6 Configuraties op mxn borden

Veronderstellen we dat $m \geq n$. Bij een gegeven startconfiguratie op een mxn bord kun je op alle rijen behalve de onderste rij alle brandende lampjes uitzetten. Dit doe je als volgt: Stel, op rij i branden een aantal lampjes. Klik in rij i+1 (dus de rij eronder) op de lampjes in die kolommen waar in rij i het lampje aan staat. Begin met de bovenste rij en werk zo van boven naar beneden. Zo bekom je een eindconfiguratie met alleen nullen in rij $1, 2, \cdots, m-1$ en mogelijk ook enen in rij m. We spreken van de *karakteristieke* configuratie. Deze techniek heet het *jagen* .

Stelling 6.1. *Een configuratie en zijn karakteristieke configuratie zitten in dezelfde configuratieklasse.*

Bewijs. De eindconfiguratie wordt bekomen door een aantal klikken uit te voeren op de beginconfiguratie. Dus zijn de twee configuraties verbonden met elkaar en zitten ze in dezelfde configuratieklasse. □

Stelling 6.2. *Als twee configuraties dezelfde karakteristieke configuratie hebben, dan zitten ze in dezelfde configuratieklasse.*

Bewijs. Gegeven twee configuraties C_1 en C_2 met dezelfde karakteristieke configuratie C, dan bestaan er schakelschema's M en N zodat $C = C_1 + M$ en $C = C_2 + N$. Maar dan is $C_2 = C_1 + (M + N)$. Dus zijn C_1 en C_2 verbonden en zitten ze in dezelfde configuratieklasse. □

Stelling 6.3. *Op een mxn bord zijn er hoogstens 2^n configuratieklassen.*

Bewijs. Er zijn hoogstens 2^n mogelijke karakteristieke configuraties, want je hebt n vakjes die je met een 0 of een 1 kan opvullen. Dus zijn er hoogstens 2^n configuratieklassen. □

Stelling 6.4. *Op een mxn bord zijn er minstens $2^{(m-1)n}$ oplosbare configuraties.*

Bewijs. Er zijn hoogstens 2^n configuratieklassen en alle oplosbare configuraties zitten in 1 klasse dus zijn er minstens $\frac{2^{m.n}}{2^n} = 2^{(m-1)n}$ oplosbare configuraties. □

Als je de beginconfiguratie C wilt oplossen, ben je er na het jagen bijna; alleen die onderste rij nog. Hiervoor gebruiken we volgende techniek: We nemen een willekeurige configuratie D in de eerste rij en we jagen daarop. Wanneer we dezelfde karakteristieke configuratie K vinden als bij het jagen op de gegeven beginconfiguratie, dan is die beginconfiguratie oplosbaar, want er zijn schakelschema's M en n zodat $C + M = K$ en $D + N = K$. Dan is $C + (M + N + D) = O$ en dus is de configuratie C oplosbaar. We moeten dus 2^n mogelijke invullingen van rij 1 onderzoeken. Deze leveren dan de mogelijke karakteristieke configuraties op. Laten we eens proberen met een voorbeeld en nemen we daarvoor een 3x2 bord.

klikserie in rij 1	jaagresultaat in rij 3
geen klikken	$(0, 0)$
enkel$(1, 1)$	$(0, 0)$
enkel$(1, 2)$	$(0, 0)$
$(1, 1)$ en$(1, 2)$	$(0, 0)$

Enkel als het jaagresultaat $(0, 0)$ is, zal de beginconfiguratie oplosbaar zijn. Van de 64 mogelijke beginconfiguraties zijn er 16 die als karakteristieke configuratie $(0, 0)$ hebben. Dit zijn de oplosbare configuraties. Net zoals in vorige sectie vinden we dat 25% van alle configuraties oplosbaar is.

Laten we nu eens de andere methode proberen: zet alle elementaire klikseries, geschreven door de rijen achter elkaar te plaatsen, in 1 matrix A. We noemen dit de *schakelmatrix* . Zo een schakelmatrix is een mn x mn matrix. Een willekeurige klikserie kunnen we voorstellen door $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{mn})$.

Stelling 6.5. *Als de rang van de schakelmatrix A van een mxn bord gelijk is aan r, dan zijn er 2^{mn-r} stille klikseries.*

Bewijs. Als de rang van A gelijk is aan r, dan zijn er $mn - r$ vrije onbekenden in het stelsel $Ax^t = O$. Elk van die vrije onbekenden kan 2 waarden aannemen: 0 of 1. Het stelsel heeft dus 2^{mn-r} oplossingen. Bijgevolg zijn er 2^{mn-r} stille klikschema's en evenveel configuratieklassen. □

Mooie stelling, maar in de praktijk weinig bruikbaar omdat de dimensie van de schakelmatrix snel zeer groot wordt, waardoor het zonder computer moeilijk wordt om de rang te bepalen. In ons verder onderzoek onderscheiden we nog twee stappen: eerst de nxn borden en nadien een onderzoek van mxn borden met vaste n.

We hebben met de computer de rang van een aantal schakelmatrices van nxn borden berekend.

n	rang A	aantal configuratieklassen	% oplosbare configuraties
2	4	1	100%
3	9	1	100%
4	12	16	$6,25\%$
5	23	4	25%
6	36	1	100%
7	49	1	100%
8	64	1	100%
9	73	256	$0,390625\%$
10	100	1	100%

In het laatste deel onderzoeken we mx2 borden met $m \geq 2$. Als $m = 2$ weten we al dat elke configuratie oplosbaar is. We experimenteren met het applet voor de waarden van m van 3 to 10. We vermoeden volgende regelmaat:

Stelling 6.6. *Gegeven is een mx2 bord met $m > 2$. Als m even is dan is elke configuratie oplosbaar. Als $m = 4k + 1$, dan is 50% oplosbaar en als $m = 4k - 1$, dan is 25% oplosbaar.*

Bewijs. Er zijn 4 mogelijkheden in de eerste rij. We kijken of, door jagen, die ook 4 verschillende mogelijkheden geven in de laatste rij. Klikken we bvb het element op de eerste rij en eerste kolom aan, dan achtereenvolgens $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Daarna herhaalt dit patroon zich op de volgende 3 rijen. Als $m = 4k + 1$ dan zijn de laatste twee rijen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en eindigt het jagen met (11). Als $m = 4k - 1$ dan zijn de laatste twee rijen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en eindigt het jagen met (00). Als $m = 4k$ dan zijn de laatste twee rijen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ en eindigt het jagen met (10). En tenslotte als $m = 4k+2$ dan zijn de laatste twee rijen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ en eindigt het jagen met (10). We kunnen dit herhalen voor een klik op de eerste rij en tweede kolom en voor tweeklikken in de eerste rij. De gevallen $m = 4k$ en $m = 4k + 2$ geven 4 verschillende laatste rijen en dus is elke configuratie oplosbaar. Als $m = 4k - 1$ is elke laatste rij (00) en is slechts 25% oplosbaar. Tenslotte als $m = 4k + 1$ dan krijg je in de laatste rij (00) of (11) en is 50% van alle configuraties oplosbaar. $\square$

We kunnen nu een gelijkaardig onderzoek voeren naar mx3 borden, mx4 borden $\cdots$.