Hoofdstuk 3

Groepshomomorfismen

3.1 Definities en basiseigenschappen

Definitie 3.1. Neem 2 groepen: $G, .$ en $H, \circ$. Een homomorfisme van G naar H is een afbeelding f tussen G en H die de structuur bewaart:

$$\forall x, y \in G : f(x.y) = f(x) \circ f(y)$$

Een injectief homomorfisme noemt men een *monomorfisme*. Een surjectief homomorfisme noemt men een *epimorfisme*. Een bijectief homomorfisme noemt men een *isomorfisme*. We noemen G en H dan isomorf en we noteren $G \cong H$. Een homomorfisme van G naar zichzelf noemen we een *endomorfisme*. Een isomorfisme van G naar zichzelf is een *automorfisme*. Een isomorfisme van groepen kunnen we opvatten als een soort naamsverandering in de groep. We noemen alle elementen anders. Misschien is zelfs de bewerking anders. Maar in zekere zin is er niets veranderd.
We noteren vanaf nu de bewerkingen in beide groepen door het vermenigvuldigingsteken.

Stelling 3.2. *Een homomorfisme tussen G en H beeldt het neutraal element van G af op het neutraal element van H.*

Bewijs. Stel $f(e_G) = x$, dan is $x.x = f(e_G).f(e_G) = f(e_G.e_G) = f(e_G) = x$. Bijgevolg is $x = e_H$. □

Stelling 3.3. *Stel f een isomorfisme tussen G en H en $o(x) = n$, dan is $o(f(x)) = n$.*

Bewijs. $x^n = e_G \Rightarrow f(x^n) = e_H \Rightarrow (f(x))^n = e_H$. Bijgevolg is n een deler van de orde van $f(x)$. Veronderstel dat er een $m < n$ bestaat waarvoor $(f(x))^m = e_H \Rightarrow f(x^m) = e_H = f(e_G)$. Omdat f injectief is volgt hieruit dat $x^m = e_G$, maar dat is onmogelijk, dus is de orde van $f(x)$ gelijk aan n. □

Stelling 3.4. *Als f een isomorfisme is, dan geldt: $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.*

Bewijs. Stel $f(x^{-1}) = y$, dan is $y.f(x) = f(x^{-1}.x) = f(e_G) = e_H$. Analoog is ook $f(x).y = e_H$, bijgevolg is y het symmetrische element van $f(x)$. □

Gevolg 3.5. *Als f een isomorfisme is dan is $\forall z \in \mathbb{Z} : f(g^z) = (f(g))^z$.*

Stelling 3.6. *Als f een isomorfisme is dan is f^{-1} ook een isomorfisme.*

Bewijs. $f(f^{-1}(x.y)) = x.y = f(f^{-1}(x)).f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x).f^{-1}(y))$. Nu is f injectief, dus volgt hieruit dat $f^{-1}(x.y) = f^{-1}(x).f^{-1}(y)$. Vermits het inverse van een bijectieve functie ook bijectief is, is f^{-1} een isomorfisme. □

Stelling 3.7. *De samenstelling van twee homomorfismen is een homomorfisme.*

Bewijs. $(g \circ f)(x.y) = g(f(x.y)) = g(f(x).f(y)) = g(f(x)).g(f(y)) = (g \circ f)(x).(g \circ f)(y)$, dus is $g \circ f$ een homomorfisme. □

Stelling 3.8. *Twee cyclische groepen van dezelfde orde zijn isomorf.*

Bewijs. Stel G de groep voortgebracht door g en $g^n = e$. Neem H de groep voortgebracht door h met $h^n = e$ en construeer $f : G \to H : g \mapsto h$. Omdat f een isomorfisme is, zullen G en H isomorf zijn. □

Gevolg 3.9. *Er is dus, op een isomorfisme na, slechts 1 cyclische groep van orde n.*

3.2 Kern en beeld van een homomorfisme

Definitie 3.10. Als f een homomorfisme is van G op H, dan is de kern van f de verzameling van alle elementen van G die op e_H worden afgebeeld.

$$kerf = \{x \in G : f(x) = e_H\}$$

Definitie 3.11. Als f een homomorfisme is van G op H, dan is het beeld van f de verzameling van alle elementen van H die het beeld zijn van elementen van G.

$$bldf = Imf = f(G) = \{y \in H : \exists x \in G : f(x) = y\}$$

Als N een normaaldeler is van G, dan is de afbeelding $f : G \to G/N : g \mapsto gN$ een surjectief groepshomomorfisme omdat $f(g.h) = (g.h)N = gN.hN = f(g).f(h)$. We noemen dit het *natuurlijk groepshomomorfisme* van G op G/N. De kern van het natuurlijk homomorfisme is de normaaldeler N.

Stelling 3.12. *$kerf$ is een normaaldeler van G.*

Bewijs. $x, y \in kerf$, dan is $f(xy^{-1}) = f(x).(f(y))^{-1} = e_H.e_H^{-1} = e_H$. Bijgevolg is $xy^{-1} \in kerf$ en is $kerf \leq G$. Rest te bewijzen dat $kerf$ een normaaldeler is van G. Neem $g \in G, x \in kerf$, dan is $f(gxg^{-1}) = f(g).f(x).(f(g))^{-1} = f(g).e_H.(f(g))^{-1} = e_H$. Dan is $gxg^{-1} \in kerf$ en bijgevolg is $kerf$ een normaaldeler van G. □

Stelling 3.13. *f is een monomorfisme als en slechts als $kerf = \{e_G\}$.*

Bewijs. Als f een monomorfisme is, is f injectief. Neem $x \in kerf$, dan is $f(x) = e_H = f(e_G)$, waaruit volgt dat $x = e_G$ en dus is $kerf = \{e_G\}$. Veronderstel omgekeerd dat e_G het enige element van de kern van f is, dan volgt uit $f(x) = f(y)$ dat $e_H = f(x).(f(y))^{-1} = f(xy^{-1})$. Dan is dus $xy^{-1} = e_G$ en daaruit volgt dat $x = y$. Bijgevolg is f injectief en dus een monomorfisme. □

Stelling 3.14. *Als f een homomorfisme is van G op H, dan is het beeld van een deelgroep van G een deelgroep van H.*

Bewijs. Stel $S \leq G$ en neem $x, y \in f(S)$, dan bestaan er elementen $a, b \in S$ met $f(a) = x$ en $f(b) = y$. Dan is $xy^{-1} = f(a).(f(b))^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(S)$. Bijgevolg is $f(S) \leq H$. □

Gevolg 3.15. *Het beeld van een groep G onder een homomorfisme van G op H is een deelgroep van H.*

Stelling 3.16. *Als f een isomorfisme is van G op H, en als S een deelgroep is van H, dan is $f^{-1}(S)$ een deelgroep van G.*

Bewijs. Neem $x, y \in f^{-1}(S)$, dan bestaan er elementen $a, b \in S$ met $f(x) = a$ en $f(y) = b$. Bijgevolg is $a.b^{-1} \in S \Rightarrow f(x).(f(y))^{-1} \in S \Rightarrow f(xy^{-1}) \in S \Rightarrow xy^{-1} \in f^{-1}(S)$. Daaruit volgt dat $f^{-1}(S)$ een deelgroep is van G. □

3.3 Homomorfismestellingen

Stelling 3.17. *Als $\varphi : G \to H$ een homomorfisme is , dan is*

$$\frac{G}{ker\varphi} \cong Im\varphi$$

Bewijs. Noteer de kern van φ door N. Definieer $\pi : G/N \to Im\varphi :$
$gN \mapsto \varphi(g)$. De functie π is goed gedefinieerd want stel $gN = g'N$, dan is $g^{-1}g' \in N$ en dus is $\varphi(g^{-1}g') = e_H$. Omdat φ een homomorfisme is volgt hieruit dat $\varphi(g) = \varphi(g')$. π is een homomorfisme, want $\pi(gN.kN) = \pi(gkN) = \varphi(gk) = \varphi(g)\varphi(k) = \pi(gN)\pi(kN)$. Verder is π injectief, want $\pi(gN) = e_H \Rightarrow \varphi(g) = e_H \Rightarrow g \in N \Rightarrow gN = N$. Verder is π ook surjectief. Immers als $y \in Im\varphi \Rightarrow \exists g \in G : \varphi(g) = y$. Neem dan gN. Nu geldt $\pi(gN) = \varphi(g) = y$. Dit alles samen geeft dat π een isomorfisme is en dus is $G/N \cong Im\varphi$. □

Gevolg 3.18. *Als φ een surjectief homomorfisme is tussen G en H dan is $G/\ker\varphi \cong H$.*

Stelling 3.19. *Als H en K normaaldelers zijn van G en $K \subseteq H$ dan geldt:*

$$\frac{H}{K} \trianglelefteq \frac{G}{K} \text{ en } \frac{G}{H} \cong \frac{G/K}{H/K}$$

Bewijs. Definieer $\pi : G/K \to G/H : gK \mapsto gH$. Deze afbeelding π is goed gedefinieerd, want stel dat $gK = g'K \Rightarrow g^{-1}g' \in K \Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow gH = g'H \Rightarrow \pi(gK) = \pi(g'K)$. Het is duidelijk dat π surjectief is. π is ook een homomorfisme, want $\pi(gK.hK) = \pi(ghK) = ghH = gH.hH = \pi(gK)\pi(hK)$. Hoe ziet de kern van π eruit? Neem $gK \in ker\pi \Rightarrow \pi(gK) = H \Rightarrow gH = H \Rightarrow g \in H$. Bijgevolg is $ker\pi = \{gK : g \in H\} = H/K$. Omdat de kern van π een normaaldeler is van G/K weten we dat $H/K \trianglelefteq G/K$. Uit het gevolg van de eerste homomorfismestelling volgt dan het gestelde. □

Stelling 3.20. *Als H een deelgroep en K een normaaldeler is van G, dan geldt:*

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}$$

Bewijs. Definieer $f : H \to \dfrac{HK}{K} : h \mapsto hK$. De functie f is een homomorfisme want $f(h_1h_2) = h_1h_2K = h_1K.h_2K = f(h_1)f(h_2)$. Bovendien is f surjectief want voor elk element $hk \in HK$ geldt $hkK = hK = f(h)$. En hoe ziet de kern van f er dan uit? $h \in kerf \Leftrightarrow hK = K \Leftrightarrow h \in K$, met andere

woorden $kerf = H \cap K$. Uit de eerste homomorfismestelling volgt dan dat: $H/kerf \cong Imf$, of dus dat $\dfrac{HK}{K} \cong \dfrac{H}{H \cap K}$ $\square$

3.4 Automorfismen

Als G en H groepen zijn, dan noteren we $Hom(G, H)$ voor de verzameling van alle homomorfismen van G naar H. In het algemeen heeft de verzameling $Hom(G, H)$ geen verdere structuur. Dat wordt anders als H een abelse groep is, want homomorfismen naar een commutatieve groep kunnen worden opgeteld:

Definitie 3.21. $A, +$ abels en φ, ψ homomorfismen van $G, \circ$ naar $A, +$. Dan is $\varphi + \psi : G \to A : x \mapsto \varphi(x) + \psi(x)$.

Stelling 3.22. *Als $A, +$ een abelse groep is dan is $Hom(G, A), +$ ook een abelse groep.*

Bewijs. $\varphi+\psi$ is een homomorfisme, want $(\varphi+\psi)(x\circ y) = \varphi(x\circ y)+\psi(x\circ y) = \varphi(x)+\varphi(y)+\psi(x)+\psi(y) = \varphi(x)+\psi(x)+\varphi(y)+\psi(y) = (\varphi+\psi)(x)+(\varphi+\psi)(y)$. Het neutrale element is het triviale homomorfisme dat elk element van G afbeeldt op 0. Het inverse element van φ is $-\varphi$. Bovendien is de optelling van homomorfismen commutatief. $\square$

Wanneer we in plaats van homomorfismen, de verzameling automorfismen van een groep G, met de samenstelling van functies,bestuderen, dan krijgen we wel een structuur:$AutG, \circ$ is een groep: de automorfisme groep van G. De afbeeldingen $\varphi_g : G \to G : x \mapsto \varphi_g(x) = gxg^{-1}$ zijn automorfismen van G, want $\varphi_g(xy) = gxyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \varphi_g(x)\varphi_g(y)$. Deze automorfismen noemt men de *inwendige* automorfismen van G. De andere automorfismen van G noemt men dan de *uitwendige* automorfismen. De verzameling van alle inwendige automorfismen van G noteert men door $Inn(G)$. Niet-abelse groepen hebben inwendige automorfismen, voor abelse groepen is de groep van de inwendige automorfismen triviaal.

Stelling 3.23. *$Inn(G)$ is een normaaldeler van $Aut(G)$.*

Bewijs. Als $\varphi_g, \varphi_h \in Inn(G)$, dan is $(\varphi_g \circ \varphi_h^{-1})(x) = \varphi_g(h^{-1}xh) = gh^{-1}xhg^{-1}$ $= \varphi_{gh^{-1}}(x)$ en dus is $Inn(G)$ een deelgroep van $Aut(G)$. Neem nu $f \in Aut(G)$ en $\varphi_g \in Inn(G)$, dan is $(f \circ \varphi_g \circ f^{-1})(x) = f(\varphi_g(f^{-1}(x))) = f(g.f^{-1}(x).g^{-1}) = f(g).x.f(g^{-1}) = f(g).x.f^{-1}(g) = \varphi_{f(g)}(x)$. Dus is $f \circ \varphi_g \circ f^{-1} \in Inn(G)$ en is $Inn(G)$ een normaaldeler van $Aut(G)$. □

De quotiëntgroep $\dfrac{Aut(G)}{Inn(G)}$ heet de *uitwendige automorfisme groep* van G en wordt genoteerd door $Out(G)$. De terminologie is een beetje misleidend, want de elementen van $Out(G)$ zijn geen automorfismen maar wel klassen van automorfismen. Bij abelse groepen is de groep van de inwendige automorfismen triviaal, en dus is $Out(G) \cong Aut(G)$.

Stelling 3.24. $Inn(G) \cong \dfrac{G}{Z(G)}$.

Bewijs. Construeer $f : G \to Inn(G) : g \mapsto \varphi_g$. De functie f is zeker surjectief en het is ook een homomorfisme want, $f(gh) = \varphi_{gh}$. Omdat $\varphi_{gh}(x) = ghx(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \varphi_g(\varphi_h(x)) = (\varphi_g \circ \varphi_h)(x)$ is $f(gh) = f(g) \circ f(h)$. Hoe ziet de kern van f eruit? $g \in kerf \Rightarrow \varphi_g = 1_G$. Dan geldt: $\forall x \in G : \varphi_g(x) = x \Rightarrow gxg^{-1} = x \Rightarrow gx = xg \Rightarrow g \in Z(G)$. Dus is $kerf = Z(G)$. Uit de eerste homomorfismestelling volgt dan het gestelde. □

Stelling 3.25. *Het inverse nemen is een automorfisme als en slechts als G abels is. We noemen dit automorfisme de inversie.*

Bewijs. $f(x) = x^{-1}$. Als f een automorfisme is dan is $f(x).f(y) = f(x.y) = (xy)^{-1} = y^{-1}.x^{-1} = f(y).f(x)$ en dus is G abels. Het omgekeerde is evident. □

3.5 Karakteristieke deelgroepen

Definitie 3.26. Een deelgroep U van een groep G is karakteristiek als

$$\forall \varphi \in Aut(G) : \varphi(U) = U$$

We onderzoeken nu een paar eigenschappen van deze karaktersitieke deelgroepen.

Stelling 3.27. *Elke karakteristieke deelgroep is een normaaldeler.*

Bewijs. Stel N een karakteristieke deelgroep van G, dan beeldt elk automorfisme van G de deelgroep N af op zichzelf. Neem het inwendig automorfisme φ_g, dan geldt $\varphi_g(N) = N$. Hieruit volgt dat $gNg^{-1} = N$ of $gN = Ng$. Bijgevolg is N een normale deelgroep van G. □

Gevolg 3.28. *Het omgekeerde is niet waar: niet elke normaaldeler is een karakteristieke deelgroep.*

Stelling 3.29. *Als G juist 1 deelgroep heeft met k elementen, dan is die deelgroep karakteristiek.*

Bewijs. Stel dat H de enige deelgroep is van G met k elementen en stel dat φ een willekeurig automorfisme is van G. Dan is $\varphi(H)$ een deelgroep van G van k elementen en dus moet $\varphi(H) = H$. Bijgevolg is H een karakteristieke deelgroep van G. □

Stelling 3.30. *De afgeleide groep G' is karakteristiek.*

Bewijs. Als φ een automorfisme is van G, dan geldt $\varphi([x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$. Bijgevolg is $\varphi(G') = G'$ en is G' dus een karakteristieke deelgroep van G. □

Stelling 3.31. *Het centrum van een groep $Z(G)$ is karakteristiek.*

Bewijs. Stel $z \in Z(G)$ en φ een willekeurig automorfisme van G. Neem een willekeurig element g uit G. Dan bestaat er een element h zodat $g = \varphi(h)$. Onderzoeken we nu of $\varphi(z)$ een element is uit $Z(G)$. Nu is $g.\varphi(z) = \varphi(h).\varphi(z) = \varphi(hz) = \varphi(zh) = \varphi(z).\varphi(h) = \varphi(z).g$. Bijgevolg commuteert $\varphi(z)$ met elk element van G en is het dus een element van het centrum van G. Dus $\varphi(Z(G)) = Z(G)$ en dus is $Z(G)$ karakteristiek. □

Stelling 3.32. *Als N normaal is in G en A is karakteristiek in N, dan is A normaal in G.*

Bewijs. Stel φ_g een inwendig automorfisme van G, dan is $\varphi_g(N) = N$. Dus is φ_g ook een automorfisme van N. Omdat A nu een karakteristieke deelgroep is van N, volgt hieruit dat $\varphi_g(A) = A$, en dus is $gA = Ag$. Maar dit betekent dat A een normaaldeler is van G. □

Stelling 3.33. *Als N karakteristiek is in G en A is karakteristiek in N, dan is A karakteristiek in G.*

Bewijs. Stel φ een automorfisme van G, dan is $\varphi(N) = N$. Noteer met φ' de beperking van φ tot N, dan is φ' een automorfisme van N en dus is $\varphi'(A) = A$. Maar dan is ook $\varphi(A) = A$ en is A een karakteristieke deelgroep van G. □