Formule van Heroon

Hoofdstuk 1

Wie was Heroon?

Heroon van Alexandrië was een belangrijke meetkundige en mechanicus die leefde in de eerste eeuw na Christus. Over zijn leven is vrijwel niets bekend. Uit zijn geschriften is op te maken dat hij les gaf aan het Museon in Alexandrië.
Veel van Heroon's werken zijn via vertalingen en interpretaties tot ons gekomen. Het gaat daarbij vooral om werken over techniek, mechanica, wiskunde en landmeetkunde die in de Byzantijnse, de Romeinse en de Arabische beschavingen eeuwen lang volop werden gebruikt als handleidingen. Van een aantal daarvan is echter niet zeker of ze wel echt door hem zijn geschreven.

Heroon's belangrijkste werken op het gebied van de wiskunde zijn:

- De Dioptra, een boek over landmeetkunde en het gebruik van de theodoliet . Hij beschrijft daarin onder andere een manier om de afstand tussen Rome en Alexandrië te bepalen gebaseerd op het tijdsverschil tussen het waarnemen van een maansverduistering in beide plaatsen.
- De Metrica, drie boeken over methoden van meten en berekenen van oppervlakte.

Ook schreef Heroon boeken die meer natuurkundige onderwerpen beslaan, zoals:

- De Pneumatica, twee boeken over mechanische apparaten gebaseerd op luchtdruk, stoom of waterdruk. Heroon begint met een theoretische beschouwing van de druk in vloeistoffen. Veel van die theorie is (met de huidige inzichten) niet correct, maar veel ook wel. Daarna beschrijft hij de werking van diverse mechanische speeltjes, zoals zingende mechanische vogeltjes, klinkende trompetten, een eenvoudige stoommachine. Vermoedelijk waren deze bedoeld als voorbeelden bij natuurkundelessen om het vak aansprekender te maken.
- De Automaton waarin hij diverse apparaten beschrijft die op mechanische of pneumatische wijze wonderen suggereren in tempels (zoals automatisch open- en dichtgaande deuren, beelden die wijn schenken, etc.)
- De Belopoeica waarin werd beschreven hoe je oorlogstuig kon maken.
- De Mechanica die grotendeels is gebaseerd op werk van Archimedes is een geschrift bedoeld voor architecten, met methodes om zeer zware objecten te verplaatsen.
- In Catoprica vertelt Heroon zijn theorie over het licht. Hij gaat uit van lichtstralen die door het oog worden uitgezonden en die met oneindige snelheid voortbewegen.

Hoofdstuk 2

De formule van Heroon

Heroon is vooral bekend voor zijn formule om de oppervlakte van een driehoek te berekenen. Vooral in de landmeetkunde wordt deze formule gebruikt omdat men vaak enkel beschikt over de lengtes van de zijden.

Stelling 2.1. *De oppervlakte A van een driehoek met zijden a,b en c en waarbij s de halve omtrek is van de driehoek, wordt gegeven door:*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Bewijs. De cosinusregel leert ons dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Hieruit volgt dat

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Dan is:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 \\
&= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(b+c-a)(b+c+a)((a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}
\end{aligned}$$

Dan is de oppervlakte van de driehoek gegeven door:

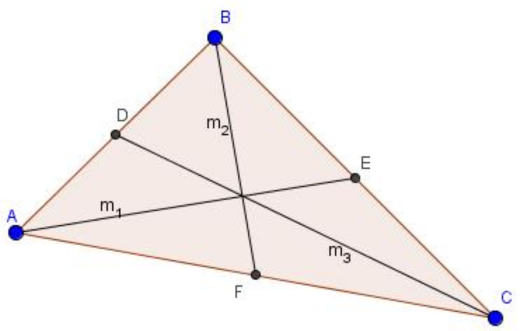
$$\begin{aligned} A &= \frac{bc \sin\alpha}{2} \\ &= \frac{bc}{2} \frac{\sqrt{4s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

$\square$

Hoofdstuk 3

Een formule met zwaartelijnen

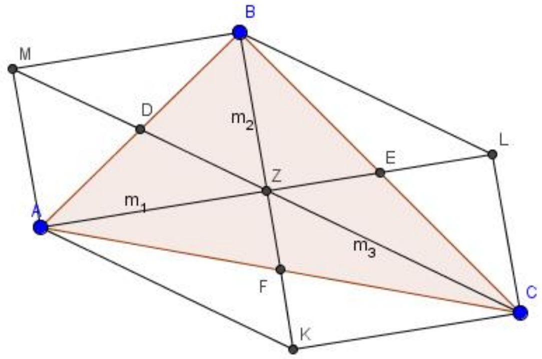
Is het mogelijk om een gelijkaardige formule voor de oppervlakte van een driehoek te vinden , maar dan nu in functie van de lengtes van de drie zwaartelijnen: m_1, m_2 en m_3? Noteer verder : $m = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{2}$.



Stelling 3.1. *De oppervlakte A van een driehoek met zwaartelijnen m_1, m_2 en m_3, wordt gegeven door:*

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_1)(m - m_2)(m - m_3)}$$

Bewijs. Construeer K,L en m zodat $|ZF| = |FK|, |ZE| = |EL|$ en $|ZD| = |DM|$



De vierhoeken AZCK, BZCL en AZBM zijn parallellogrammmen want de diagonalen snijden elkaar midden door. Bovendien is $|ZL| = \frac{2}{3}m_1$, $|ZK| = \frac{2}{3}m_2$ en $|ZM| = \frac{2}{3}m_3$. Het zwaartepunt van een driehoek ligt op $\frac{2}{3}$ van het hoekpunt en $\frac{1}{3}$ van de zijde. Zodat $\triangle AZK \cong \triangle ZCL \cong \triangle BZM$, omdat de zijden van de driehoeken telkens $\frac{2}{3}$ van de zwaartelijnen van $\triangle ABC$ zijn. De halve omtrek van deze driehoeken is $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{2}{3}m_3\right) = \frac{2}{3}m$

$$\begin{aligned}
S(\triangle ABC) =& S(\triangle AZC) + S(\triangle BZC) + S(\triangle BZA) \\
=& S(\triangle AKC) + S(\triangle BLC) + S(\triangle BMA) \\
=& S(\triangle AZK) + S(\triangle LZC) + S(\triangle BZM) \\
=& 3.S(\triangle AZK) \\
=& 3.\sqrt{\frac{2}{3}m(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_1)(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_2)(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_3)} \\
=& \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)}
\end{aligned}$$

$\square$

Hoofdstuk 4

Een formule met hoogtelijnen

Is het ook mogelijk om een formule, zoals die van Heroon, te vinden voor de oppervlakte van een driehoek, maar dan met hoogtelijnen? Noteer de drie hoogtelijnen van de driehoek door h_1, h_2 en h_3. Stellen we verder dat $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\Big)$.

Stelling 4.1. *De oppervlakte A van een driehoek met hoogtelijnen h_1, h_2 en h_3, wordt gegeven door:*

$$\frac{1}{A} = 4.\sqrt{\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\Big)\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_2}\Big)\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_3}\Big)}$$

Bewijs. Noteer de zijden van de gegeven driehoek met a, b en c en de hoogtelijnen erop met h_1, h_2 en h_3. Dan weten we dat $2A = a.h_1 = b.h_2 = c.h_3$ of $a = \frac{2A}{h_1}$, $b = \frac{2A}{h_2}$ en $c = \frac{2A}{h_3}$. Bijgevolg is $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = A.\Big(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\Big) = \frac{2A}{h}$. Hieruit volgt dat $s - a = 2A\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\Big)$,
$s - b = 2A\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_2}\Big)$ en $s - c = 2A\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_3}\Big)$.
Uit de formule van Heroon volgt dat

$$A = \sqrt{\frac{2A}{h}.2A\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\Big)2A\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_2}\Big)2A\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_3}\Big)}$$

of

$$A = 4A^2.\sqrt{\frac{1}{h}.\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\Big)\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_2}\Big)\Big(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_3}\Big)}$$

Hieruit volgt het gestelde.

□