Hoofdstuk 7

Eerste Voorbeelden

7.1 Groepen van orde 2

Omdat 2 een priemgetal is, is er slechts 1 groep van orde 2 (type 2/1): de cyclische groep $C_2 = \{g : g^2 = 1\}$ met bewerkingstabel:

$\cdot$	1	g
1	1	g
g	g	1

- C_2 is abels en enkelvoudig.
- Elk element heeft orde 2, dus C_2 is een 2-groep.
- De enige deelgroepen zijn de twee triviale deelgroepen.
- $Aut(C_2) \cong \mathbb{Z}_2^\times = \{1\}$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_2, +$
- $\mathbb{Z}_3^\times = \{1, 2\}, .$
- $\mathbb{Z}_4^\times = \{1, 3\}, .$
- $\mathbb{Z}_6^\times = \{1, 5\}, .$
- $S_2 = \{1, (12)\}, \circ$ de permutatiegroep van 2 elementen.

- $\{1,-1\}\,,.$ de verzameling van de vierkantswortels uit 1.
- $\{I_\pi, s_m\}\,,\circ$, de symmetriegroep van een lijnstuk, waarbij m de middelloodlijn is van dit lijnstuk.
- $\{I_\pi, s_O\}\,,\circ$, de symmetriegroep van een lijnstuk, waarbij O het midden is van dit lijnstuk.

Besluit:

Stelling 7.1. *Er is 1 abelse enkelvoudige groep van orde 2:* C_2

7.2 Groepen van orde 3

Omdat 3 een priemgetal is, is er slechts 1 groep van orde 3 (type 3/1): de cyclische groep $C_3 = \{g : g^3 = 1\}$ met bewerkingstabel:

$\cdot$	1	g	g^2
1	1	g	g^2
g	g	g^2	1
g^2	g^2	1	g

- C_3 is abels en enkelvoudig.
- Elk element heeft orde 3, dus C_3 is een 3-groep.
- De enige deelgroepen zijn de twee triviale deelgroepen.
- $Aut(C_3) = \{1, \varphi\} \cong \mathbb{Z}_3^\times \cong C_2$ met $\varphi : g \mapsto g^2$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_3, +$
- $\{1, \omega, \omega^2\}\,,.$ de verzameling van de derdemachtswortels uit 1.
- $\{I_\pi, r_{120^\circ}, r_{240^\circ}\}\,,\circ$ de rotatiegroep van een gelijkzijdige driehoek.

Besluit:

Stelling 7.2. *Er is 1 abelse enkelvoudige groep van orde 3:* C_3

7.3 Groepen van orde 4

Als we alle mogelijke Latijnse vierkanten van orde 4 maken vinden we op een isomorfisme na, 2 groepen van orde 4. Vooreerst hebben we de cyclische groep (type 4/1) $C_4 = \{g : g^4 = 1\}$ met bewerkingstabel:

$\cdot$	1	g	g^2	g^3
1	1	g	g^2	g^3
g	g	g^2	g^3	1
g^2	g^2	g^3	1	g
g^3	g^3	1	g	g^2

- C_4 is abels maar niet enkelvoudig.
- Voor elke deler d van 4 zijn er $\varphi(d)$ elementen van orde d. Er is dus 1 element van orde 2 en dat is g^2. Verder zijn er 2 elementen van orde 4, namelijk g en g^3. C_4 is een 2-groep.
- $H = \{1, g^2\}$ is een normaaldeler van C_4 en $G/H \cong C_2$. Zodoende is
$$G = C_2 \uparrow C_2$$
- $1 \to H = \{1, g^2\} \cong C_2 \to E = C_4 \to G = \{H, gH\} \cong C_2 \to 1$. Neem $s(H) = 1$ en $s(gH) = g$. Dan is α triviaal. Definieer bovendien $f(gH, gH) = g^2$. Bijgevolg is
$$C_4 = C_2 \#^f C_2$$
- Voor elke deler d van 4 is er juist 1 deelgroep van orde d. Buiten de triviale deelgroepen is er slechts 1 deelgroep van orde 2: $\{1, g^2\}$. In het totaal zijn er 3 deelgroepen.
- $Aut(C_4) = \{1, \varphi\} \cong \mathbb{Z}_4^\times \cong C_2$ met $\varphi : g \mapsto g^3$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_4, +$
- $\mathbb{Z}_5^\times = \{1, 2, 3, 4\}, .$
- $\mathbb{Z}_{10}^\times = \{1, 3, 7, 9\}, .$

- $\{1, i, -1, -i\}\,, .$ de verzameling van de vierdemachtswortels uit 1.
- $\{I_\pi, r_{90^\circ}, r_{180^\circ}, r_{270^\circ}\}\,, \circ$ de rotatiegroep van een vierkant.

De andere groep van orde 4 is de *Viergroep* of *groep van Klein* (type 4/2) $G = \{1, a, b, ab$ met $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\}$. De bewerkingstabel ziet er uit als:

$\cdot$	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

- G is abels maar niet enkelvoudig.
- Elk element heeft orde 2, dus G is een 2-groep.
- De Viergroep is het direct product van twee groepen die isomorf zijn met C_2. Zo is
$$G = \{1, a\} \times \{1, b\} \cong C_2 \times C_2$$
- Er zijn 5 deelgroepen: de twee triviale en 3 deelgroepen die isomorf zijn met C_2 : $\{1, a\}\,, \{1, b\}\,, \{1, ab\}$.
- De automorfisme groep van G bevat alle homomorfismen die de elementen a, b en $c = ab$ van orde 2 onderling permuteren. De automorfismen en hun werking op a en b zijn gegeven in volgende tabel:

	a	b
φ_1	a	b
φ_2	a	ab
φ_3	b	a
φ_4	b	ab
φ_5	ab	a
φ_6	ab	b

Hierbij geldt: $\varphi_4^3 = 1, \varphi_3^2 = \varphi_2^2, \varphi_2\varphi_4 = \varphi_4^2\varphi_2$. Dit is de dihaeder groep D_3. Het automorfisme φ_4 speelt de rol van r en het automorfisme φ_2 de rol van s. Dus: $Aut(C_2 \times C_2) = D_3$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_8^\times = \{1, 3, 5, 7\}, \cdot$.
- $\mathbb{Z}_{12}^\times = \{1, 5, 7, 11\}, \cdot$.
- De symmetriegroep van een rechthoek.
- $\{f_1(z) = z, f_2(z) = -z, f_3(z) = \overline{z}, f_4(z) = -\overline{z}\}, \circ$: transformaties in het vlak van Gauss.
- $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}, \cdot$.

Besluit:

Stelling 7.3. *Er zijn 2 abelse groepen van orde 4: $C_2 \uparrow C_2$ en $C_2 \times C_2$*

7.4 Groepen van orde 5

Omdat 5 een priemgetal is, is er slechts 1 groep van orde 5 (type 5/1): de cyclische groep $C_5 = \{g : g^5 = 1\}$ met bewerkingstabel:

$\cdot$	1	g	g^2	g^3	g^4
1	1	g	g^2	g^3	g^4
g	g	g^2	g^3	g^4	1
g^2	g^2	g^3	g^4	1	g
g^3	g^3	g^4	1	g	g^2
g^4	g^4	1	g	g^2	g^3

- C_5 is abels en enkelvoudig.
- Elk element heeft orde 5. C_5 is een 5-groep.
- De enige deelgroepen zijn de twee triviale deelgroepen.
- $Aut(C_5) = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \cong \mathbb{Z}_5^\times \cong C_4$ met $\varphi_1(g) = g^2, \varphi_2(g) = g^3, \varphi_3(g) = g^4$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_5, +$
- $\{1, \epsilon_5, \epsilon_5^2, \epsilon_5^3, \epsilon_5^4\}$, . de verzameling van de vijfdemachtswortels uit 1.
- $\{I_\pi, r_{72°}, r_{144°}, r_{216°}, r_{288°}\}$, $\circ$ de rotatiegroep van een gelijkzijdige vijfhoek.

Besluit:

Stelling 7.4. *Er is 1 abelse enkelvoudige groep van orde 5: C_5*

7.5 Groepen van orde 6

Volgens de stelling van Cauchy heeft G zeker een element van orde 3 en een element van orde 2. Noem deze respectievelijk a en b, met $a^3 = b^2 = 1$. Met ab en a^2b erbij hebben we 6 elementen. Wat dan met ba? Er zijn twee mogelijkheden. Ofwel is $ba = ab$ en dan zal ook $ba^2 = a^2b$. De groep is dan abels en cyclisch, want stel $ab = g$, dan is $g^2 = a^2, g^3 = b, g^4 = a$ en $g^5 = a^2b$. Dus de eerste groep van orde 6 is de cyclische groep (type 6/1: $C_6 = \{g : g^6 = 1\}$

- C_6 is abels maar niet enkelvoudig.
- Voor elke deler d van 6 zijn er $\varphi(d)$ elementen van orde d. Er is dus 1 element van orde 2, en dat is g^3. Verder zijn er 2 elementen van orde 3, namelijk g^2 en g^4. Bovendien zijn er 2 elementen van orde 6: g en g^5.
- Voor elke deler d van 6 is er juist 1 deelgroep met orde d. Buiten de triviale deelgroepen zijn dat $H = \{1, g^3\}$ van type (2/1) en $K = \{1, g^2, g^4\}$ van type (3/1). De eerste bevat alle elementen van orde 2 en de andere de elementen van orde 3. In het totaal zijn er 4 deelgroepen.
- G is het direct product van H en K via de identificatie:
  $(1, 1) = 1, (g^3, g^2) = g, (1, g^4) = g^2, (g^3, 1) = g^3, (1, g^2) = g^4$ en $(g^3, g^4) = g^5$. Bijgevolg is:

$$C_6 \cong C_2 \times C_3$$

- $Aut(C_6) = \{1, \varphi\} \cong \mathbb{Z}_6^\times \cong C_2$ met $\varphi : g \mapsto g^5$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_6, +$
- $\mathbb{Z}_7^\times = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, .$
- $\mathbb{Z}_9^\times = \{1, 2, 4, 8, 7, 5\}, .$
- $\mathbb{Z}_{14}^\times = \{1, 5, 11, 13, 9, 3\}, .$
- $\mathbb{Z}_{18}^\times = \{1, 5, 7, 17, 13, 11\}, .$
- $\{1, \omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2\}, .$ de verzameling van de zesdemachtswortels uit 1.
- De rotatiegroep van de regelmatige zeshoek.

Als echter $ba = a^2b$ dan is ook $ba^2 = ab$ en krijgen we de dihaedergroep (type 6/2): $D_3 = \{r, s : r^3 = s^2 = 1 \text{ en } sr = r^2 s\}$

- D_3 is de eerste niet abelse groep en is niet enkelvoudig.
- Er zijn 3 toevoegingsklassen: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{r, r^2\}$ en $C_3 = \{s, rs, r^2 s\}$. De elementen van C_2 hebben orde 3 en de elementen van C_3 hebben orde 2.
- Er zijn $\tau(3) + \sigma(3) = 2 + 1 + 3 = 6$ deelgroepen. De triviale deelgroepen: $\{1\}$, D_3, de groep $\{1, r, r^2\}$ van type 3/1 en 3 deelgroepen van type 2/1: $\{1, s\}$, $\{1, rs\}$, $\{1, r^2 s\}$. Enkel $H = \{1, r, r^2\}$ is een normaaldeler.
- We kunnen D_3 splitsen over H. Neem $K = \{1, s\}$, dan is D_3 het semidirect product van H en K en dus is

  $$D_3 \cong C_3 \rtimes C_2$$

  Hierbij wordt het product gedefineerd via $\varphi_1(r) = r$ en $\varphi_s(r) = srs = r^2$.
- $Z(D_3) = \{1\}$ en $D_3' = \{1, r, r^2\}$.

- $Aut(D_3) \cong C_3 \rtimes C_3^\times = D_3$. Omdat $Z(D_3) = \{1\}$ is $Inn(D_3) \cong D_3$. De automorfismen en hun werking op r en s zijn gegeven in volgende tabel:

	r	s
φ_1	r	s
φ_2	r	r^2s
φ_3	r	rs
φ_4	r^2	s
φ_5	r^2	r^2s
φ_6	r^2	rs

  Er geldt: $\varphi_2^3 = 1, \varphi_4^2 = \varphi_5^2 = \varphi_6^2 = 1$ en $\varphi_2\varphi_4 = \varphi_4\varphi_2^2$. Het automorfisme φ_2 speelt de rol van r en het automorfisme φ_4 de rol van s.

Mogelijke realisaties:

- De symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek.
- De permutatiegroep op 3 elementen.
- $Gl_2(\mathbb{Z}_2) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

Besluit:

Stelling 7.5. *Er zijn 2 groepen van orde 6. De abelse groep $C_2 \times C_3$ en de niet-abelse groep: $C_2 \rtimes C_3$*

7.6 Groepen van orde 7

Omdat 7 priem is, is er slechts 1 groep van orde 7: de cyclische groep C_7 (type 7/1): $C_7 = \{g : g^7 = 1\}$

- C_7 is abels en enkelvoudig.

- Elk element heeft orde 7, dus is C_7 een 7-groep.
- De enige deelgroepen zijn de twee triviale deelgroepen.
- $Aut(C_7) = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \cong \mathbb{Z}_7^\times \cong C_6$ met $\varphi_1(g) = g^2, \varphi_2(g) = g^3, \varphi_3(g) = g^4, \varphi_4(g) = g^5, \varphi_5(g) = g^6\}$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_7, +$
- de rotatiegroep van een regelmatige zevenhoek.
- de verzameling zevendemachtswortels uit 1.

Besluit:

Stelling 7.6. *Er is 1 abelse enkelvoudige groep van orde 7: C_7*

7.7 Groepen van orde 8

Bestuderen we nu de groepen van orde 8. Als er een element van orde 8 is, dan is de groep cyclisch en hebben we C_8 (type 8/1): $C_8 = \{g : g^8 = 1\}$

- C_8 is abels maar niet enkelvoudig.
- Voor elke deler d van 8 zijn er $\varphi(d)$ elementen van orde d. Zo zijn er 4 elementen van orde 8: g, g^3, g^5, g^7. Er zijn 2 elementen van orde 4: g^2, g^6 en er is 1 element van orde 2: g^4. Dus C_8 is een 2-groep.
- $H = \{1, g^2, g^4, g^6\} \cong C_4$ is een normaaldeler van C_8 en $G/H \cong C_2$. Zodoende is
$$C_8 = C_4 \uparrow C_2 = (C_2 \uparrow C_2) \uparrow C_2$$
- $1 \to H = \{1, g^2, g^4, g^6\} \cong C_4 \to E = C_8 \to G = \{H, gH\} \cong C_2 \to 1$.
Neem $s(H) = 1$, $s(gH) = g$. Dan is α triviaal. Definieer bovendien $f_(gH, gH) = g^2$. Bijgevolg is
$$C_8 = (C_2 \#^f C_2) \#^f C_2$$

- Voor elke deler d van 8 is er juist 1 deelgroep van orde d. Buiten de triviale deelgroepen zijn dat $A = \{1, g^4\}$ van type 2/1 en $B = \{1, g^2, g^4, g^6\}$ van type 4/1. De eerste bevat de elementen van orde 4 en de andere de elementen van orde 2. In het totaal zijn er 4 deelgroepen.

- $Aut(C_8) = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \cong C_8^\times = \{1, 3, 5, 7\} \cong C_2 \times C_2$ met $\varphi_1(g) = g^3, \varphi_2(g) = g^5, \varphi_3(g) = g^7$. Hierbij is $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = \varphi_3^2 = 1$ en $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_3$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_8, +$

- de rotatiegroep van een regelmatige achthoek

- $\{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ mod 17,.: de kwadraatresten modulo 17. Dit zijn de getallen die modulo 17 het kwadraat zijn van een element uit $\mathbb{Z}_{17}$.

- $\{\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\}$,. de verzameling van de achtstemachtswortels uit 1

Veronderstel nu dat de groep van orde 8 geen element van orde 8 heeft, maar wel een element van orde 4. Noem dit element a. Neem dan een element b buiten de deelgroep H voortgebracht door a. We hebben dan al de elementen: $1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$. Veronderstel dat b orde 2 heeft. Wat nu met ba? Als $ba = ab$ dan is ook $ba^2 = a^2b$ en $ba^3 = a^3b$ en is de groep abels. Dit is groep G (type 8/2): $G = \{a, b : a^4 = b^2 = 1 \text{ en } ab = ba\}$

- G is abels, maar niet enkelvoudig.

- Er zijn 4 elementen van orde 4: a, a^3, ab, ab^3 en 3 elementen van orde 2: a^2, b, a^2b. Deze groep is een 2-groep.

- Er zijn 8 deelgroepen. Buiten de triviale deelgroepen is er 1 deelgroep van type 4/1:$\{1, a, a^2, a^3\}$. Er zijn 2 deelgroepen van type $4/2$: $\{1, a^2, b, a^2b\}, \{1, a^2, ab, a^3b\}$ en tenslotte zijn er ook 3 deelgroepen van type 2/1 $\{1, b\}, \{1, a^2\}$ en $\{1, a^2b\}$ van type 2/1.

- G is het directe product van $\{1, a, a^2, a^3\}$ en $\{1, b\}$, dus

$$G = C_4 \times C_2 = (C_2 \uparrow C_2) \times C_2$$

- $Aut(G) \cong D_4$. De automorfismen en hun werking op a en b zijn gegeven in volgende tabel:

	a	b
φ_1	a	b
φ_2	a^3	b
φ_3	a	a^2b
φ_4	a^3	a^2b
φ_5	ab	b
φ_6	ab	a^2b
φ_7	a^3b	b
φ_8	a^3b	a^2b

Er geldt: $\varphi_8^2 = \varphi_2, \varphi_8^3 = \varphi_5, \varphi_8^4 = 1, \varphi_8\varphi_3 = \varphi_7, \varphi_8^2\varphi_2 = \varphi_4$ en $\varphi_8^3\varphi_2 = \varphi_5$. Hiermee is het duidelijk dat de automorfismegroep van $C_2 \times C_4$ de dihaedergroep D_4 is. Het automorfisme φ_8 speelt de rol van r en het automorfisme φ_3 de rol van s.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_{15}^{\times} = \{1, 2, 4, 8, 11, 7, 14, 13\}, .$
- $\mathbb{Z}_{16}^{\times} = \{1, 3, 9, 11, 7, 5, 15, 13\}, .$
- $\mathbb{Z}_{20}^{\times} = \{1, 3, 9, 7, 11, 13, 19, 17\}, .$
- $\mathbb{Z}_{30}^{\times} = \{1, 7, 19, 13, 11, 17, 29, 23\}, .$

Redeneren we verder. a heeft orde 4 en b is een element van orde 2 buiten de deelgroep voortgebracht door a. Nu kan ba nooit gelijk zijn aan a^2b, want dan is $ba^2b = ba.ab = a^2b.ab = a^4b^2 = 1$ en bijgevolg zou $a = 1.a = b^2a = b.ba = ba^2b = 1$. Dit is onmogelijk. Dus rest de mogelijkheid dat $ba = a^3b$. Dit geeft de dihaedergroep D_4 (type 8/4: $D_4 = \{r, s : r^4 = s^2 = 1, sr = r^3s\}$

- D_4 is niet abels en is niet enkelvoudig.

- Er zijn 5 toevoegingsklassen: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{r, r^3\}$, $C_3 = \{r^2\}$, $C_4 = \{s, r^2 s\}$ en $C_5 = \{rs, r^3 s\}$. De elementen van C_3, C_4 en C_5 hebben orde 2 en de elementen van C_2 hebben orde 4.

- Er zijn $\tau(4) + \sigma(4) = 3 + 1 + 2 + 4 = 10$ deelgroepen. Buiten de twee triviale is er 1 deelgroep van type 4/1 $\{1, r, r^2, r^3\}$. Er zijn 5 deelgroepen van type 2/1: $\{1, r^2\}$, $\{1, s\}$, $\{1, rs\}$, $\{1, r^2 s\}$, $\{1, r^3 s\}$ en er zijn 2 deelgroepen van type 4/2: $\{1, s, r^2, r^2 s\}$ en $\{1, rs, , r^2, r^3 s\}$. Enkel $H = \{1, r, r^2, r^3\}$ is een normaaldeler.

- We kunnen D_4 splitsen over H. Neem $K = \{1, s\}$, dan is D_4 het semidirect product van H en K en dus is

  $$D_4 \cong C_4 \rtimes C_2 = (C_2 \uparrow C_2) \rtimes C_2$$

  Hierbij wordt het product gedefinieerd via $\varphi_1(r) = r$ en $\varphi_s(r) = srs = r^3$.

- $Z(D_4) = \{1, r^2\} = D_4'$.

- $Aut(D_4) \cong C_4 \rtimes C_2 = D_4$. De automorfismen en hun werking op r en s zijn gegeven in volgende tabel:

	r	s
φ_1	r	s
φ_2	r	$r^2 s$
φ_3	r	rs
φ_4	r	$r^3 s$
φ_5	r^3	s
φ_6	r^3	$r^2 s$
φ_7	r^3	rs
φ_8	r^3	$r^3 s$

  Er geldt: $\varphi_3^4 = \varphi_5^2 = 1$ en $\varphi_5 \varphi_3 = \varphi_2^3 \varphi_5$. Het automorfisme φ_3 speelt de rol van r en het automorfisme φ_5 de rol van s. Omdat $Z(D_4) = \{1, r^2\}$ telt $Inn(D_4)$ 4 elementen. We vinden: $Inn(D_4) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_6\}$. Omdat $\varphi_2^2 = \varphi_5^2 = \varphi_6^2 = 1$ en $\varphi_2 \varphi_5 = \varphi_6$ weten we dat $Inn(D_4) \cong C_2 \times C_2$.

Mogelijke realisaties:

- De symmetriegroep van het vierkant.

Veronderstel dat elk element buiten H echter orde 4 heeft. Neem zo een element b. Dus $b^4 = 1$. Dan heeft b^2 orde 2 en moet het in H liggen. Het enige element van orde 2 daar is a^2, dus moet $b^2 = a^2$. Bestuderen we weer ba. Als $ba = ab$, dan is $(a^3b)^2 = a^3ba^3b = a^6b^2 = a^8 = 1$. Dit betekent dat a^3b orde 2 heeft, wat tegen de veronderstelling is. Als $ba = a^2b$, dan is $ba = b^2b = b^3$ en zou $a = b^2$, wat ook onmogelijk is. Rest er het geval $ba = a^3b$. Deze groep noemen we de quaternionengroep
(type 8/5): $Q_8 = \{a, b : a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, ba = a^3b\}$

- Q_8 is niet abels en niet enkelvoudig.

- Er zijn 5 toevoegingsklassen. Er is 1 element van orde 2 in de klasse $C_2 = \{a^2\}$ en er zijn 6 elementen van orde 4 in de klassen $C_3 = \{a, a^3\}, C_4 = \{b, a^2b\}$ en $C_5 = \{ab, a^3b\}$. Bijgevolg is Q_8 een 2-groep.

- Er zijn 6 deelgroepen. Buiten de onechte deelgroepen is er 1 deelgroep van type 2/1:$\{1, a^2\}$ en zijn er 3 deelgroepen van type 4/1: $\{1, a, a^2, a^3\}$, $\{1, b, a^2, a^2b\}$ en $\{1, ab, a^2, a^3b\}$. Elke echte deelgroep is een normaaldeler van Q_8 en elke echte deelgroep is cyclisch.

- $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ is een normaaldeler van Q_8 en $G/H \cong C_2$. Zodoende is
$$Q_8 = C_4 \uparrow C_2 = (C_2 \uparrow C_2) \uparrow C_2$$
.

- $1 \to H = \{1, a, a^2, a^3\} \cong C_4 \to E = Q_8 \to G = \{H, bH\} \cong C_2 \to 1$.
Neem $s(H) = 1$, $s(bH) = b$. Dan is $\alpha_{bH}(a) = a^3$, $\alpha_{bH}(a^2) = a^2$ en $\alpha_{bH}(a^3) = a$. Definieer bovendien $f_3(gH, gH) = b^2 = a^2$. Bijgevolg is
$$Q_8 = (C_2 \#^{f_1} C_2) \#_{\alpha}^{f_3} C_2$$

- $Z(Q_8) = \{1, a^2\} = Q_8'$.

- Omdat het centrum van Q_8 twee elementen bevat, zijn er 4 inwendige automorfismen die een normale deelgroep vormen van de groep der automorfismen. Hun werking op a en b wordt gegeven in volgende tabel:

	a	b
φ_1	a	b
φ_2	a	b^3
φ_3	a^3	b
φ_4	a^3	b^3

Omdat $\varphi_2^2 = \varphi_3^2 = \varphi_4^2 = 1$ en $\varphi_2\varphi_3 = \varphi_4$ vinden we dat

$$Inn(Q_8) \cong C_2 \times C_2$$

Het bepalen van de automorfismegroep doen we later.

Mogelijke realisaties:

- $\{1, -1, i, -1, j, -j, k, -k\}$ de verzameling van de quaternionen.
- $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\}$

Rest de situatie waar er geen element is van orde 4, met andere woorden waar elk element orde 2 heeft. Neem als generatoren a, b en c, dan heeft de groep verder als elementen ab, ac, bc en abc. Er geldt dat $a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = (abc)^2 = 1$. Dit is de groep van type 8/3: $G = \{a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = (abc)^2\}$

- G is abels en niet enkelvoudig.
- Alle elementen, buiten het eenheidselement, hebben orde 2. G is een 2-groep.
- Er zijn 16 deelgroepen. Buiten de 2 triviale zijn er 7 van type 2/1:
  $\{1, a\}, \{1, b\}, \{1, c\}, \{1, ab\}, \{1, ac\}, \{1, bc\}, \{1, abc\}$. De 7 andere zijn van type 4/2: $\{1, a, b, ab\}, \{1, a, c, ac\}, \{1, a, abc, bc\}, \{1, b, c, bc\}$, $\{1, ab, ac, bc\}, \{1, ab, abc, c\}, \{1, ac, abc, b\}$
- G is het directe product van $\{1, a\}, \{1, b\}$ en $\{1, c\}$, dus

$$G = C_2 \times C_2 \times C_2$$

- We kunnnen elk paar elementen vervangen door om het even welke andere 2 elementen als generatoren. Dit kan op $7.6 = 42$ manieren. Een derde generator kan op 4 manieren gekozen worden want hij moet onafhankelijk zijn van de vorige twee, dus het product van die element kan niet worden genomen. Bijgevolg zijn er $7.6.4 = 168$ automorfismen. Welek groep dit is zullen we later zien.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_{24}^{\times}, . = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$
- $\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}, .$
- De symmetriegroep van een balk.
- De verzameling van alle deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$ met het symmetrische verschil dat de elementen berekent uit de unie van twee verzamelingen zonder de elementen uit de doorsnede.

Besluit:

Stelling 7.7. *Er zijn 5 groepen van orde 8. Drie ervan zijn abels : $(C_2 \uparrow C_2) \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$ en $(C_2 \uparrow C_2) \uparrow C_2$. Er zijn 2 niet abels groepen: $(C_2 \uparrow C_2) \uparrow C_2$ en $(C_2 \uparrow C_2) \rtimes C_2$*

7.8 Groepen van orde 9

Als er een element van orde 9 is, dan is de groep cyclisch en hebben we C_9 (type 9/1): $C_9 = \{g : g^9 = 1\}$

- C_9 is abels maar niet enkelvoudig.
- Voor elke deler d van 9 zijn er $\varphi(d)$ elementen van orde d. Zo zijn er 6 elementen van orde 9: $g, g^2, g^4, g^5, g^7, g^8$. Er zijn 2 elementen van orde 6: g^3, g^6. Dus C_9 is een 3-groep.
- Voor elke deler d van 9 is er juist 1 deelgroep van orde d. Buiten de triviale deelgroepen is dat $A = \{1, g^3, g^6\}$ van type 3/1. In het totaal zijn er 3 deelgroepen.

- $H = \{1, g^3, g^6\}$ is een normaaldeler van C_8 en $G/H \cong C_3$. Zodoende is
$$C_8 = C_3 \uparrow C_3$$

- $1 \to H = \{1, g^3, g^6\} \cong C_3 \to E = C_9 \to G = \{H, gH, g^2H\} \cong C_3 \to 1$.
Neem $s(H) = 1$, $s(gH) = g$ en $s(g^2H) = g^2$. Dan is α triviaal. Definieer $f(gH, gH) = 1$ en $f(gH, g^2H) = f(g^2H, H) = f(g^2H, g^2H) = g^3$. Bijgevolg is
$$C_9 = C_3 \#^f C_3$$

- $Aut(C_9) = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \cong C_9^\times = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \cong C_6$ met $\varphi_1(g) = g^2, \varphi_2(g) = g^4, \varphi_3(g) = g^5, \varphi_3(g) = g^5, \varphi_4(g) = g^7, \varphi_5(g) = g^8$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_9, +$
- De rotatiegroep van een regelmatige negenhoek.
- De verzameling van de negendemachtswortels uit 1.
- $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25\}, .$ in $\mathbb{Z}_{27}$.

Als er geen element van orde 9 is, dan hebben alle elementen orde 3. Neem a en b met $a^3 = b^3 = 1$. De groep heeft dan als elementen: $1, a, a^2, b, b^2, ab, ab^2, a^2b, a^2b^2$. Wat dan met ba? De enige mogelijkheid is dat $ba = ab$, want stel bijvoorbeeld dat $ba = a^2b$, dan zou $(ba)^3 = b$ wat onmogelijk omdat elk element orde 3 moet hebben. We krijgen de groep van type 9/2: $G = \{a, b : a^3 = b^3 \text{ en } ab = ba\}$

- G is abels maar niet enkelvoudig.
- Alle niet triviale elementen hebben orde 3. Dus G is een 3-groep.
- G heeft 6 deelgroepen. Buiten de triviale deelgroepen is zijn er 4 deelgroepen van type 3/1: $\{1, a, a^2\}, \{1, b, b^2\}, \{1, ab, a^2b^2\}, \{1, ab^2, a^b\}$.

- G is het direct product van $\{1, a, a^2\}$ en $\{1, b, b^2\}$. Dus $G \cong C_3 \times C_3$.
- De automorfismegroep zullen we later bepalen.

Mogelijke realisaties:

- $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\}, .$
- $\{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}, .$ in $\mathbb{Z}_{91}$.
- $\{ax + b$ met $a, b \in \{0, 1, 2\}\}, +$ gerekend modulo 3.

Besluit:

Stelling 7.8. *Er zijn 2 abelse groepen van orde 9:* $C_3 \uparrow C_3$ *en* $C_3 \times C_3$

7.9 Groepen van orde 10

Als er een element van orde 10 is, dan is de groep cyclisch en hebben we C_{10} (type 10/1): $C_{10} = \{g : g^{10} = 1\}$

- C_8 is abels maar niet enkelvoudig.
- Voor elke deler d van 10 zijn er $\varphi(d)$ elementen van orde d. Er is 1 element van orde 2: g^5. Verder zijn er 4 elementen van orde 5: g^2, g^4, g^6, g^8 en er zijn 4 elementen van orde 10: g, g^3, g^7, g^9.
- Voor elke deler d van 10 is er juist 1 deelgroep van orde d. Buiten de triviale deelgroepen zijn dat $A = \{1, g^5\}$ van type 2/1 en $B = \{1, g^2, g^4, g^6, g^8\}$ van type 5/1. In het totaal zijn er 4 deelgroepen.
- G is het direct product van A en B, dus $C_{10} \cong C_2 \times C_5$.
- $Aut(C_{10}) = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \cong C_{10}^{\times} = \{1, 3, 7, 9\} \cong C_4$ met $\varphi_1(g) = g^3, \varphi_2(g) = g^7, \varphi_3(g) = g^9$.

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_{10}, +$
- de rotatiegroep van een regelmatige tienhoek.
- de verzameling van de tiendemachtswortels uit 1.

Volgens de stelling van Cauchy heeft G zeker een element van orde 5 en een element van orde 2. Noem deze respectievelijk a en b, met $a^5 = b^2 = 1$. Met ab, a^2b, a^3b en a^4b erbij hebben we 10 elementen. Wat dan met ba? Er zijn vier mogelijkheden. Als $ba = ab$ is de groep abels en cyclisch en die hebben we al. Als $ba = a^2b$, dan is $a = b^2a = bba = ba^2bbaab = a^2ab = a^4$, wat onmogelijk is. Als $ba = a^3b$, dan is $a = b^2a = ba^3b = a^2a^2a^2b^2 = a^2$, wat eveneens onmogelijk is. Bijgevolg is $ba = a^4b$ en krijgen we de dihaedergroep D_5 (type 10/2): $D_5 = \{r, s : r^5 = s^2 = 1, sr = r^4s\}$

- D_5 is niet abels en niet enkelvoudig.
- Er zijn 4 toevoegingsklassen: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{r, r^4\}$, $C_3 = \{r^2, r^3\}$ en $C_4 = \{s, rs, r^2s, r^3s, r^4s\}$. De elementen van C_2 en C_3 hebben orde 5 en de elementen van C_4 hebben orde 2.
- Er zijn $\tau(5) + \sigma(5) = 2 + 1 + 5 = 8$ deelgroepen. Buiten de twee triviale is er 1 deelgroep van type 5/1 $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$. Er zijn 5 deelgroepen van type 2/1: $\{1, s\}$, $\{1, rs\}$, $\{1, r^2s\}$, $\{1, r^3s\}$ en $\{1, r^4s\}$ Enkel $H = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ is een normaaldeler.
- We kunnen D_5 splitsen over H. Neem $K = \{1, s\}$, dan is D_5 het semidirect product van H en K en dus is

  $$D_5 \cong C_5 \rtimes C_2$$

  Hierbij wordt het product gedefinieerd via $\varphi_1(r) = r$ en $\varphi_s(r) = srs = r^4$.
- $Z(D_5) = \{1\}$ en $D_5' = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$.
- $Aut(D_5) \cong C_5 \rtimes C_4$. Deze groep zullen we later bestuderen. Omdat $Z(D_5) = \{1\}$ is $Inn(D_5) \cong D_5$.

Mogelijke realisaties:

- De symmetriegroep van een regelmatige vijfhoek.

Besluit:

Stelling 7.9. *Er zijn 2 abelse groepen van orde 10:* $C_2 \times C_5$ *en* $C_2 \rtimes C_5$

7.10 Vragen

Na een eerste reeks van voorbeelden kunnen we ons een aantal vragen stellen:

- Is er een formule om het aantal groepen van gegeven orde te bepalen? Kunnen we met andere woorden alle groepen classificeren?
- Kunnen we de abelse groepen schrijven als een direct product van cyclische groepen van priemorde?
- Welke zijn de enkelvoudige groepen? Zijn dit de bouwstenen voor alle andere groepen?
- Kunnen we via het indirect product alle groepen vormen? Met andere woorden: hoe kunnen groepen geconstrueerd worden vanuit eenvoudige groepen en hoe beïnvloeden deze de structuur van de gegeven groep?
- Kunnen we de automorfismegroepen van elke groep bepalen?
- Kunnen we andere voorbeelden van groepen vinden buiten degene die we al gebruikt hebben?

Op deze vragen gaan we proberen een antwoord te geven in de volgende hoofdstukken.