Hoofdstuk 7

Eenheden van $\mathbb{Z}S_3$

7.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}S_3$

Stel $S_3 = \{1, \rho, \rho^2, \epsilon, \epsilon\rho, \epsilon\rho^2\}$ de symmetrische groep van orde 6. Definieer dan $\mathbb{Q}S_3 = \{a + b\rho + c\rho^2 + d\epsilon + e\epsilon\rho + f\epsilon\rho^2 : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}\}$

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}S_3, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra}$$

S_3 is een niet-abelse groep met drie toevoegingsklassen en dus drie irreducibele representaties: twee van graad 1 en eentje van graad 2 want $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : S_3 \to \mathbb{Q} : \rho \mapsto 1 \text{ en } \epsilon \mapsto 1 \\
&\rho_2 : S_3 \to \mathbb{Q} : \rho \mapsto 1 \text{ en } \epsilon \mapsto -1 \\
&\rho_3 : S_3 \to M_2(\mathbb{Q}) : \rho \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } \epsilon \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\alpha : \mathbb{Q}S_3 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(\mathbb{Q})$ waardoor een willekeurig element $a + b\rho + c\rho^2 + d\epsilon + e\epsilon\rho + f\epsilon\rho^2$ afgebeeld wordt op

$$\left(a+b+c+d+e+f, a+b+c-d-e-f, \begin{pmatrix} a-c+d-e & c-b-d+f \\ b-c-e+f & a-b-d+e \end{pmatrix} \right)$$

De matrix van deze lineaire afbeelding is dan :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat:

Stelling 7.1. $\mathbb{Q}S_3 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(\mathbb{Q})$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

7.2 De groepsring $\mathbb{Z}S_3$

De groep der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(\mathbb{Q})$ is $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}S_3$ noteren we met H. Het is duidelijk dat, via α, geldt dat $H \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$. Elk element van de groepsring $\mathbb{Z}S_3$ wordt door α afgebeeld in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$. Dus is $\mathbb{Z}S_3 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}S_3$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{6}(1 + \rho + \rho^2 + \epsilon + \epsilon\rho + \epsilon\rho^2) \in \mathbb{Q}S_3$ en $\alpha(x) = (1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$. Bijgevolg is $x \in H \setminus \mathbb{Z}S_3$. We vragen ons af welk deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$ overeenkomt met $\mathbb{Z}S_3$.

Stelling 7.2. $\mathbb{Z}S_3 \cong \{(x, y, \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})\}$ *met*

$$z + u \equiv t + v \ mod\ 3$$
$$y \equiv v - u \equiv z - t \ mod\ 3$$
$$x \equiv z + u \ mod\ 3$$

Bewijs. Noteer $\alpha(\mathbb{Z}S_3) = A$. Dan geldt:$(x, y, \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix}) \in A$:

$$\iff \exists a, b, \cdots, f \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, b, \cdots, f \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2t - 2v \equiv 0 \bmod 6 \\ 4y + 4u - 4v \equiv 0 \bmod 6 \\ 2z - 2t + 2u + 4v \equiv 0 \bmod 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z + u \equiv t + v \bmod 3 \\ y \equiv v - u \equiv z - t \bmod 3 \\ x \equiv t + v \bmod 3 \end{cases}$$

Hieruit volgt het gestelde. □

7.3 Eenheden in $\mathbb{Z}S_3$

Stelling 7.3. $U(\mathbb{Z}S_3) \cong \{\begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z})$ *met* $z+u \equiv t+v$ *mod* $3\}$

Bewijs. Omdat $\mathbb{Z}S_3$ isomorf is met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$, bepalen we eerst de eenheden van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})$. Nu geldt dat:
$U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus M_2(\mathbb{Z})) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(M_2(\mathbb{Z})) = \{\pm 1\} \oplus \{\pm 1\} \oplus GL_2(\mathbb{Z})$.
Hierbij is $GL_2(\mathbb{Z})$ de verzameling 2 x 2 matrices over $\mathbb{Z}$ met det $= \pm 1$. Nu is $(x, y, \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix}) \in \{\pm 1\} \oplus \{\pm 1\} \oplus GL_2(\mathbb{Z})$ als $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en $\begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$. Dus moet $zv - tu = \pm 1$. Nu is $U(\mathbb{Z}S_3) \cong A \cap (U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(M_2(\mathbb{Z})))$. Definieer $B = \{\begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) : z + u \equiv t + v\}$. Met elk element van $U(\mathbb{Z}S_3)$ correspondeert juist 1 element van B. Stel omgekeerd dat $\begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in B$, construeer dan $x \equiv z + u \bmod 3$ en $y \equiv z - t \bmod 3$. Nu geldt:

$$\begin{aligned} x.y &\equiv (z+u)(z-t) \bmod 3 \\ &\equiv (t+v)(z-t) \bmod 3 \\ &\equiv zt - t^2 + vz - vt \bmod 3 \\ &\equiv zt - t(z+u-v) + vz - vt \bmod 3 \\ &\equiv vz - tu \bmod 3 \\ &\equiv \pm 1 \bmod 3 \end{aligned}$$

Dan moet $x \equiv \pm 1 \bmod 3$ en $y \equiv \pm 1 \bmod 3$. Dus kunnen we steeds een unieke $x = \pm 1$ en $y = \pm 1$ vinden zodat $(x, y, \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix}) \in A \cap (U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(M_2(\mathbb{Z})))$. Hieruit volgt het gestelde. □

We spreken van een genormaliseerde eenheid als $\rho_1(a + b\rho + c\rho^2 + d\epsilon + e\epsilon\rho + f\epsilon\rho^2) = a + b + c + d + e + f = 1$. De verzameling van alle genormaliseerde eenheden van $\mathbb{Z}G$ noteren we met $U_1(\mathbb{Z}G)$. Als $\alpha(a + b\rho + c\rho^2 + d\epsilon + e\epsilon\rho + f\epsilon\rho^2) = (x, y, \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix})$, dan moet $x = 1$. Voor een eenheid geldt dat $x \equiv z + u \bmod 3$. Bijgevolg is:

Stelling 7.4. *$U_1(\mathbb{Z}S_3) \cong \{\begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $z + u \equiv t + v \equiv 1 \ mod\ 3\}$*

De verzameling genormaliseerde eenheden $U_1(\mathbb{Z}S_3)$ is een deelgroep van $U(\mathbb{Z}S_3)$ met index 2 en dus een normaaldeler. Bovendien is $-I_2$ geen genormaliseerde eenheid, dus is:

Stelling 7.5. *$U(\mathbb{Z}S_3) = U_1(\mathbb{Z}S_3) \times \{I_2, -I_2\}$*

Noteer de verzameling genormaliseeerde eenheden met determinant gelijk aan 1 door N, dan is $N \cong \{X = \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $z + u \equiv t + v \equiv 1$ mod 3 met $\det X = 1\}$ of $N = \{X \cong \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1-a & 2-a \end{pmatrix}$ mod 3$\}$. Dan is
$-N \cong \{X \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $z + u \equiv t + v \equiv 2$ mod 3 met $\det X = 1\}$
$\epsilon N \cong \{X \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $z + u \equiv t + v \equiv 1$ mod 3 met $\det X = -1\}$
$-\epsilon N \cong \{X \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $z + u \equiv t + v \equiv 2$ mod 3 met $\det X = -1\}$

Stelling 7.6. *$U(\mathbb{Z}S_3) \cong N \times \{1, \epsilon\}$ met*

$$N = \{X \cong \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1-a & 2-a \end{pmatrix} \ mod\ 3\}$$

7.4 Torsie eenheden

7.4.1 Inleiding

Een torsie eenheid is een eenheid van eindige orde. We noteren de verzameling van alle torsie eenheden van $\mathbb{Z}G$ door $T(U(\mathbb{Z}G))$ en de verzameling van alle genormaliseerde torsie eenheden door $T(U_1(\mathbb{Z}G))$.
Een eenheid van oneindige orde noemen we torsie vrij.
Bij abelse groepen is $T(U(\mathbb{Z}G)) = \pm G$ en $T(U_1(\mathbb{Z}G)) = G$. Er is de stelling van Cohn-Livingstone uit 1965, die zegt dat de orde van elke genormaliseerde torsie eenheid een deler is van de exponent van de groep.
Omdat $\exp(S_3) = 6$, kan de orde van een torsie eenheid van $\mathbb{Z}S_3$ enkel 2,3 of 6 zijn. Omdat de eenheden van $\mathbb{Z}S_3$ elementen zijn van $GL_2(\mathbb{Z})$ onderzoeken we eerst de elementen van eindige orde in $GL_2(\mathbb{Z})$. We vinden volgende resultaten in de theorie van matrixrekenen:

- De determinant van een matrix X uit $GL_2(\mathbb{Z})$ is steeds ± 1. De verzameling matrices uit $GL_2(\mathbb{Z})$ met determinant gelijk aan 1 noteren we met $SL_2(\mathbb{Z})$.
- Elk element van eindige orde in $GL_2(\mathbb{Z})$ heeft orde 1,2,3,4 of 6.
- De eigenwaarden van een matrix X uit $GL_2(\mathbb{Z})$ liggen op de eenheidscirkel en zijn elkaars complex toegevoegde. Hun product is gelijk aan de determinant van X en dus ± 1.
- Er is 1 element van orde 2 in $GL_2(\mathbb{Z})$ waarvan de determinant gelijk is aan $+1$, namelijk $-I_2$.
- Alle andere elementen van orde 2 in $GL_2(\mathbb{Z})$ hebben een determinant gelijk aan -1.
- Deze elementen van orde 2 zijn van de vorm:

  $$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ met } a^2 + bc = 1$$

  Voor al deze matrices X geldt dat $\operatorname{sp}(X) = 0$ en $\det X = -1$
- Er zijn juist 2 toevoegingsklassen van matrices uit $GL_2(\mathbb{Z})$ waarvoor $\operatorname{sp}(X) = 0$ en $\det X = -1$. Als vertegenwoordigers kan je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nemen.

- De elementen van orde 3 zijn van de vorm:

$$X = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ met } a(a-1)+bc=-1$$

Voor al deze matrices X geldt dat sp $(X) = -1$ en $\det X = 1$. Als klassevertegenwoordiger kan je dan $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ nemen.

- De elementen van orde 4 zijn van de vorm:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ met } a^2+bc=-1$$

Voor al deze matrices X geldt dat sp $(X) = 0$ en $\det X = 1$.

- Er is 1 klasse van matrices in $Gl_2(\mathbb{Z})$ waarvoor geldt dat sp $(X) = 0$ en $\det X = 1$. Als klassevertegenwoordiger kan je dan $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- De elementen van orde 6 zijn van de vorm:

$$X = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ met } a(a+1)+bc=-1$$

Voor al deze matrices X geldt dat sp $(X) = 1$ en $\det X = 1$. Als klassevertegenwoordiger kan je dan $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nemen.

- $Gl_2(\mathbb{Z})$ wordt voortgebracht door $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- $Sl_2(\mathbb{Z})$ wordt voortgebracht door $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, een torsie vrij element en $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ een element van orde 4 met $T^2 = -I_2$.

- $Sl_2(\mathbb{Z})$ kan ook worden voortgebracht door 2 torsie elementen T en $U = TS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, een element van orde 6 met $U^3 = -I_2$ of door S en $STS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.4.2 Torsie elementen van orde 3

De elementen van orde 3 hebben altijd determinant +1 en zitten dus in $SL_2(\mathbb{Z})$. Noteer de verzameling genormaliseerde eenheden in $SL_2(\mathbb{Z})$ door Ω. De matrices $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ genereren $SL_2(\mathbb{Z})$. De nevenklasse vertegenwoordigers van Ω in $SL_2(\mathbb{Z})$ zijn $\{\pm I_2, \pm S, \pm T, \pm U\}$.

Stelling 7.7. *Er is 1 toevoegingsklasse van elementen van orde 3 in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$. Alle genormaliseerde torsie eenheden van orde 3 zijn in $\mathbb{Z}S_3$ dus toegevoegd aan ρ.*

Bewijs. In $SL_2(\mathbb{Z})$ is er 1 toevoegingsklasse van elementen van orde 3 met als vertegenwoordiger $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dus als X een genormaliseerde torsie eenheid is van orde 3 dan $\exists Z \in Sl_2(\mathbb{Z}) : X = Z^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z$

Nu is $Z = \pm WY$ met $W \in \{I_2, S, T, U\}$ en $Y \in U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

Maar dan is $X = (\pm WY)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (\pm WY) = Y^{-1}W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} WY$.

Hieruit volgt dat $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} W = YXY^{-1} \in U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

Als $W = S$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

Als $W = T$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

Als $W = U$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

De enige mogelijkheid voor W is dus $W = I_2$, maar dan is $X = Y^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y$.

En dus is X toegevoegd aan $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$. □

We proberen nu een concrete constructie te geven voor dergelijke torsie eenheden van orde 3. De commutator deelgroep $S_3' = \{1, \rho, \rho^2\}$, zodat $S_3/S_3' = \{S_3', \epsilon S_3'\}$. Deze groep is abels. Definieer nu:

$$\varphi : \mathbb{Z}S_3 \to \mathbb{Z}(S_3/S_3') :$$

$$\gamma = a + b\rho + c\rho^3 + d\epsilon + e\epsilon\rho + f\epsilon\rho^2 \mapsto aS_3' + b\rho S_3' + c\rho^2 S_3' + d\epsilon S_3' + e\epsilon\rho S_3' + f\epsilon\rho^2 S_3'$$

Dan is $\varphi(\gamma) = (a+b+c)S_3' + (d+e+f)\epsilon S_3'$. Het vermoeden van Zassenhaus, dat elke torsieeenheid rationaal toegevoegd is aan een triviale eenheid, is bevestigd voor S_3. Als γ een torsie eenheid is van orde 3, dan weten we dat het rationaal toegevoegd is aan ρ zodat $\gamma = \alpha\rho\alpha^{-1}$ en dus is $\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha\rho\alpha^{-1}) = \varphi(\alpha).\varphi(\rho).\varphi(\alpha)^{-1} = \varphi(\rho) = S_3'$. Bijgevolg geldt voor γ dat $a+b+c = 1$ en $d+e+f = 0$.
Berman bewees ook dat, voor een niet-triviale torsie eenheid in een eindige groep, steeds geldt dat $a = 0$. Alles bij elkaar hebben we dus dat $c = 1-b$ en $f = -d-e$.
Bijgevolg is geldt voor een torsie eenheid γ van orde 3 dat: $\rho_3(\gamma) = \begin{pmatrix} a-c+d-e & c-b-d+f \\ b-c-e+f & a-b-d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+b+d-e & 1-2b-2d-e \\ -1+2b-2e-d & -b-d+e \end{pmatrix}$
De determinant van deze matrix moet $+1$ zijn dus moet:
$(-1+b+d-e)(-b-d+e)-(1-2b-2d-e)(2b-1-2e-d) = 1$ of na uitrekening: $d^2+e^2+de = b^2-b$.
Stel $b-d = k \in \mathbb{Z}$, dan kan vorige uitdrukking herleid worden tot $(2k-1-e)d = e^2-k^2+k$. Stel nu $2k-1-e = n$, dan is $nd = n(n-4k+2)+3k^2-3k+1$. Maar dan moet n een deler zijn van $3k^2-3k+1$. We kunnen nu γ helemaal uitdrukken in functie van n en k.

Stelling 7.8. *Als γ een genormaliseerde torsie eenheid is van orde 3, dan kan γ beschreven worden door 2 parameters als volgt:*

$$\gamma = (n-3k+2+\frac{3k^3-3k+1}{n})\rho + (3k-n-1-\frac{3k^3-3k+1}{n})\rho^2+$$

$$(n-4k+2+\frac{3k^3-3k+1}{n})\epsilon+(2k-1-n)\epsilon\rho+(2k-1-\frac{3k^3-3k+1}{n})\epsilon\rho^2$$

met k een willekeurig geheel getal en n een deler van $3k^2-3k+1$

Neem bijvoorbeeld $k = 2$ en $n = 7$, dan is $\gamma = 4\rho - 3\rho^2 + 2\epsilon - 4\epsilon\rho + 2\epsilon\rho^2$ en $\alpha(\rho) = (1, 1, \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 13 & -10 \end{pmatrix})$

7.4.3 Torsie elementen van orde 2

Er is 1 element van orde 2 in $Sl_2(\mathbb{Z})$, namelijk $-I_2$. De andere elementen van orde 2 in $Gl_2(\mathbb{Z})$ hebben allemaal determinant gelijk aan -1.We weten dat er juist twee toevoegingsklassen zijn voor deze elementen.

Als vertegenwoordigers kan je kiezen voor $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nu wordt $Gl_2(\mathbb{Z})$ voortgebracht door de elementen $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Noteer de verzameling genormaliseerde eenheden in $Gl_2(\mathbb{Z})$ door Λ. De nevenklasse vertegenwoordigers van Λ in $Gl_2(\mathbb{Z})$ zijn $\{\pm I_2, \pm K, \pm K^2, \pm LK\}$

Stelling 7.9. *Er zijn 2 toevoegingsklassen van elementen van orde 2 in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$. Alle genormaliseerde torsie eenheden van orde 2 zijn in $\mathbb{Z}S_3$ dus toegevoegd aan ϵ of $\rho - \rho^2 - \epsilon + \epsilon\rho + \epsilon\rho^2$.*

Bewijs. Als X een genormaliseerde torsie eenheid is van orde 2 dan $\exists Z \in Gl_2(\mathbb{Z}) : X = Z^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z$ of $\exists Z \in Gl_2(\mathbb{Z}) : X = Z^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Z$

Nu is $Z = \pm WY$ met $W \in \{I_2, K, K^2, LK\}$ en $Y \in U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

Een eerste mogelijkheid is dat $X = (\pm WY)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\pm WY)$ of $X = Y^{-1}W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} WY$, dus $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W \in \Lambda$

Als $W = K$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \Lambda$.

Als $W = K^2$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \notin \Lambda$.

Als $W = LK$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \notin \Lambda$.

De enige mogelijkheid voor W is dus $W = I_2$, maar dan is $X = Y^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$.

En dus is X toegevoegd aan $\epsilon\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

Maar $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $\epsilon\rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ zitten uiteraard in dezelfde klasse.

De tweede mogelijkheid is dat $X = (\pm WY)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (\pm WY)$ of $X = Y^{-1}W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} WY$, dus $W^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} W \in \Lambda$

Als $W = K$ dan is $W^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \notin \Lambda$.

Als $W = K^2$ dan is $W^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}W = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix} \notin \Lambda$.

Als $W = LK$ dan is $W^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}W = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix} \notin \Lambda$.

De enige mogelijkheid voor W is dus $W = I_2$, maar dan is $X = Y^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}Y$.

En dus is X toegevoegd aan $\rho - \rho^2 - \epsilon + \epsilon\rho + \epsilon\rho^2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$.

$\square$

We proberen ook nu een concrete constructie te geven voor torsie eenheden van orde 2. Als γ een torsie eenheid is van orde 2, dan weten we dat het rationaal toegevoegd is aan ϵ zodat $\gamma = \alpha\epsilon\alpha^{-1}$ en dus is $\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha\epsilon\alpha^{-1}) = \varphi(\alpha).\varphi(\epsilon).\varphi(\alpha)^{-1} = \varphi(\epsilon) = \epsilon S_3'$. Bijgevolg geldt voor γ dat $a + b + c = 0$ en $d + e + f = 1$. Verder geldt ook hier dat $a = 0$. Alles bij elkaar hebben we dus dat $c = -b$ en $f = 1 - d - e$.
Bijgevolg geldt voor een torsie eenheid γ van orde 2 dat: $\rho_3(\gamma) =$
$\begin{pmatrix}-c+d-e & c-b-d+f\\ b-c-e+f & -b-d+e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b+d-e & -2b-2d+1-e\\ 2b-2e-d+1 & -b-d+e\end{pmatrix}$
De determinant van deze matrix moet -1 zijn dus moet:
$(b+d-e)(-b-d+e) - (1+2b-d-2e)(-2b+1-e-2d) = -1$ of na uitrekening: $b^2 = d^2 + de + e^2 - d - e$.
Stel $b - d = k \in \mathbb{Z}$, dan kan vorige uitdrukking herleid worden tot $(2k+1-e)d = e^2 - e - k^2$. Stel nu $2k+1-e = n$, dan is $nd = n(n-4k-12)+3k^2+2k$. Maar dan moet n een deler zijn van $3k^2+2k$. We kunnen nu γ helemaal uitdrukken in functie van n en k.

Stelling 7.10. *Als γ een genormaliseerde torsie eenheid is van orde 2, dan kan γ beschreven worden door 2 parameters als volgt:*

$$\gamma = (n - 3k - 1 + \frac{3k^3+2k}{n})(\rho - \rho^2) +$$

$$(n - 4k - 1 + \frac{3k^3+2k}{n})\epsilon + (2k+1-n)\epsilon\rho + (2k+1-\frac{3k^3+2k}{n})\epsilon\rho^2$$

met k een willekeurig geheel getal en n een deler van $3k^2+2k$

Neem bijvoorbeeld $k = 2$ en $n = 11$, dan is $\gamma = 4\rho - 4\rho^2 + \epsilon - 4\epsilon\rho + 4\epsilon\rho^2$ en $\alpha(\rho) = (1, -1, \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 16 & -9 \end{pmatrix})$. Dit element zit in de toevoegingsklasse van ϵ.

7.4.4 Torsie elementen van orde 6

Als γ een torsie eenheid is van orde 3, dan is $-\gamma$ een torsie eenheid van orde 6. De torsie eenheden van orde 6 liggen dus niet in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$.
In $U(\mathbb{Z}S_3)$ is er 1 toevoegingsklasse van elementen van orde 6 en die zijn allemaal toegevoegd aan $-\rho$.

7.5 Torsie vrij complement

We proberen nu verder de structuur te beschrijven van $U_1(\mathbb{Z}S_3)$. Voor abelse groepen weten we dat de genormaliseerde eenhedengroep het direct product is van de triviale eenheden en een eindig voortgebrachte vrije abelse groep. De triviale eenheden hebben dus een torsie vrij normaal complement in de genormaliseerde eenheden groep. Maar S_3 is niet abels. Heeft S_3 ook een normaal torsie vrij complement in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$? We zijn dus op zoek naar een deelgroep V van $U_1(\mathbb{Z}S_3)$ zodat V een normaaldeler is van $U_1(\mathbb{Z}S_3)$, $S_3.V = U_1(\mathbb{Z}S_3)$ en $S_3 \cap V = 1$. Belangrijke voorbeelden van torsie vrije eenheden zijn de bicyclische eenheden.

7.5.1 Bicyclische eenheden

Veronderstel dat x een element is van orde n in de groep G, noteer dan $\widehat{x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$. Definieer

$$b(x, y) = 1 + (1 - x)y\widehat{x}$$

$$b'(x, y) = 1 + \widehat{x}y(1 - x)$$

als de bicyclische eenheden van de eerste, respectievelijk tweede soort.
Het is duidelijk dat : $b(x, 1) = b(1, x) = b(x, x) = 1$.

Stelling 7.11. *$b(x, y)$ is een eenheid.*

Bewijs. Veronderstel dat $o(x) = n$ en $o(y) = s$. Dan is $b(x, y).b(x, y^2 + \cdots + y^{s-1}) = (1 - (1 - x)y\widehat{x}).(1 + (1 - x)(y^2 + \cdots + y^{s-1})\widehat{x}) = 1 + (1 - x)(y + y^2 + \cdots + y^{s-1})\widehat{x} = 1 - (1 - x)\widehat{x} = 1$. Bijgevolg is $b(x, y)$ een eenheid. $\square$

Stelling 7.12. *Als x en y commuteren, dan is $b(x,y) = 1$.*

Bewijs. $b(x,y) = 1 + (1-x)y\widehat{x} == 1 + (1-x)\widehat{x}y = 1 + (1-x^n)y = 1$ □

Stelling 7.13. *Een bicyclische eenheid is torsie vrij.*

Bewijs. $b^2(x,y) = 1 + 2(1-x)y\widehat{x} + (1-x)y\widehat{x}(1-x)y\widehat{x} = 1 + 2(1-x)y\widehat{x}$. Algemeen is $b^s(x,y) = 1 + s.(1-x)y\widehat{x}$. Tenzij $b(x,y) = 1$, is dus elke bicyclische eenheid torsie vrij. □

Stelling 7.14. *Een bicyclische eenheid $b(x,y)$ is een triviale eenheid als en slechts als y de deelgroep voortgebracht door x normaliseert en in dat geval is $b(x,y) = 1$.*

Bewijs. Als y de deelgroep $\langle x \rangle$ normaliseert, dan is $y^{-1}xy = x^j$ en dus is $xy = yx^j$. Omdat $x^j\widehat{x} = \widehat{x}$, zal dus $xy\widehat{x} = y\widehat{x}$. Bijgevolg is $b(x,y) = 1 + (1-x)y\widehat{x} = 1 + y\widehat{x} - xy\widehat{x} = 1$.
Stel omgekeerd dat $b(x,y)$ een triviale eenheid is, dan bestaat er een $g \in G$ zodat $b(x,y) = g$. Hieruit volgt dat $1 + y\widehat{x} = g + xy\widehat{x}$. Als $g = 1$, dan is $y = xyx^j$ of $y^{-1}xy = x^j$. Dus y normaliseert de deelgroep $\langle x \rangle$. Stel echter dat $g \neq 1$. Omdat is de vorige uitdrukking 1 in het linkerlid staat, moet het ook voorkomen in het rechterlid, dus bestaat er een i zodat $1 = xyx^i$. Maar dan is $y = x^{-(i+1)}$ en hieruit volgt dat $x = 1$, wat tegen de veronderstelling is. Hieruit volgt het gestelde. □

Noteer met B de deelgroep van $U_1(\mathbb{Z}G)$ voortgebracht door de bicyclische eenheden, dan kan je vorige stelling herformuleren als : De deelgroep B voortgebracht door de bicyclische eenheden is triviaal als en slecht als elke deelgroep van G normaal is.

Stelling 7.15. *De deelgroep B, voortgebracht door de bicyclische eenheden van $U_1(\mathbb{Z}G)$, wordt genormaliseerd door G.*

Bewijs.

$$\begin{aligned} g^{-1}b(x,y)g &= g^{-1}(1+(1-x)y\widehat{x})g \\ &= 1+g^{-1}(1-x)y\widehat{x}g \\ &= 1+(1-g^{-1}xg)g^{-1}yg\widehat{g^{-1}xg} \\ &= b(g^{-1}xg, g^{-1}yg) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat B genormaliseerd wordt door G □

De bicyclische eenheden van $\mathbb{Z}S_3$ zijn:
$b(\epsilon,\rho) = 1+\rho-\rho^2-\epsilon\rho+\epsilon\rho^2 = (1,1,\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}) = b_1$
$b(\epsilon\rho,\rho) = 1+\rho-\rho^2+\epsilon-\epsilon\rho^2 = (1,1,\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) = b_2$
$b(\epsilon\rho^2,\rho) = 1+\rho-\rho^2-\epsilon+\epsilon\rho = (1,1,\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = b_3$

Verder zijn:
$b(\epsilon,\epsilon\rho) = b(\epsilon,\rho^2) = b_1^{-1} = 1-\rho+\rho^2+\epsilon\rho+\epsilon\rho^2$
$b(\epsilon\rho,\epsilon\rho^2) = b(\epsilon\rho,\rho^2) = b_2^{-1} = 1-\rho+\rho^2-\epsilon+\epsilon\rho^2$
$b(\epsilon\rho^2,\epsilon) = b(\epsilon\rho^2,\rho^2) = b_3^{-1} = 1-\rho+\rho^2+\epsilon-\epsilon\rho$
$b(\epsilon,\epsilon\rho^2) = b_1$, $b(\epsilon\rho,\epsilon) = b_2$ en $b(\epsilon\rho^2,\epsilon\rho) = b_3$.

Er zijn dus 6 niet triviale bicyclische eenheden in $\mathbb{Z}S_3$: b_1, b_2, b_3 en hun inversen.
Om verder te rekenen heb je ook nog volgende rekenregels:

$$\begin{aligned} \rho b_1 &= b_2\rho \\ \rho b_2 &= b_3\rho \\ \rho b_3 &= b_1\rho \\ \epsilon b_1 &= b_1^{-1}\epsilon \\ \epsilon b_2 &= b_3^{-1}\epsilon \\ \epsilon b_3 &= b_2^{-1}\epsilon \end{aligned}$$

7.5.2 Normale complementen van S_3 in $U_1(\mathbb{Z}G)$

We weten dat $U_1(\mathbb{Z}G) \cong \{X = \begin{pmatrix} z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $z+u \equiv t+v \equiv 1 \bmod 3$ en $\det X = 1\}$.

Neem dan $V = \{X = \begin{pmatrix} 1+3s & 3t \\ 3v & 1+3w \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z})$ met $\det X = 1\}$.
V is een deelgroep van $U_1(\mathbb{Z}G)$. Uit de theorie van de hoofdcongruentie deelgroepen weten we dat V vrij is van rang 3 en dat V torsie vrij is.
V wordt voortgebracht door de elementen:
$a = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en $c = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Nu is:
$\rho^2 b_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = b^{-1}$
$\rho^2 b_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = c^{-1}$
$\rho^2 b_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a$
Dus V wordt evengoed voorgebracht door de elementen $\rho^2 b_1, \rho^2 b_2$ en $\rho^2 b_3$.

Stelling 7.16. *S_3 heeft $V = \langle \rho^2 b_1, \rho^2 b_2, \rho^2 b_3 \rangle$ als normaal complement in $U_1(\mathbb{Z}G)$. V is torsie vrij en is een vrije groep van rang 3.*

Bewijs. We weten reeds dat V torsie vrij is en rang 3 heeft. Rest te bewijzen dat $U_1(\mathbb{Z}G) = S_3.V$ en dat V een normaaldeler is van $U_1(\mathbb{Z}G)$. Als $Y \in V$, dan is $Y \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod 3. Neem $X \in U_1(\mathbb{Z}G)$, dan is $X^{-1}YX \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod 3 en dus is $X^{-1}YX \in V$. Bijgevolg is V een normaaldeler van $U_1(\mathbb{Z}G)$. Rest te bewijzen dat elk element X van $U_1(\mathbb{Z}G)$ te schrijven is als een product een element van S_3 en V. De kolommen van X zijn mod 3 gelijk aan $(1,0),(0,1)$ of $(-1,-1)$. Mod 3 heb je voor X dus als mogelijkheden: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Neem nu bijvoorbeeld $X \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Omdat $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1+3s & 3t \\ 3v & 1+3w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ weten we dat er een $Y \in V$ is zodat $X = \rho.Y$. Voor elk geval kunnen we dat zo nagaan. Hieruit volgt het gestelde.

□

S_3 heeft ook nog andere normale torsie vrije complementen in $U_1(\mathbb{Z}S_3)$. Zo is bijvoorbeeld ook de deelgroep B, voortgebracht door de bicyclische eenheden een normaal complement van S_3. B is ook torsie vrij en van rang 3. We zijn nu ook in de mogelijkheid een mooie representatie te geven van $U_1(\mathbb{Z}S_3)$:

Stelling 7.17. $U_1(\mathbb{Z}S_3) = \{\rho, \epsilon, b_1, b_2, b_3 : \rho^3 = \epsilon^2 = 1,$
$\rho b_1 = b_2\rho, \rho b_2 = b_3\rho, \rho b_3 = b_1\rho, \epsilon b_1 = b_1^{-1}\epsilon, \epsilon b_2 = b_3^{-1}\epsilon, \epsilon b_3 = b_2^{-1}\epsilon\}$