Symmetrische betrekkingen tussen nulpunten van veeltermen

Hector Mommaerts

Hoofdstuk 1

Tweedegraads vergelijkingen

Gegeven is een tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met 2 reële oplossingen x_1 en x_2. We kennen volgende formules :

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P &= x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

We noemen S en P de *elementaire symmetrische functies* van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

We vragen ons af of we ook andere uitdrukkingen van x_1 en x_2 kunnen schrijven in functie van de coëfficiënten van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, of in functie van de elementaire symmetrische functies. Geven we een paar voorbeelden:

Voorbeeld 1: $A(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= S^2 - 2P \\ &= (-\frac{b}{a})^2 - 2\frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2 : $B(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$:

$$\begin{aligned}
x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 =& x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\
=& P.S \\
=& \frac{c}{a}(-\frac{b}{a}) \\
=& -\frac{bc}{a^2}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 3 : $C(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =& \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} \\
=& \frac{S}{P} \\
=& \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \\
=& -\frac{b}{a}\frac{a}{c} \\
=& -\frac{b}{c}
\end{aligned}$$

In al deze voorbeelden merken we op dat de gegeven uitdrukkingen steeds symmetrisch zijn in x_1 en x_2.
We vermoeden dan ook dat elke symmetrische uitdrukking van de nulpunten van een tweedegraads veelterm te schrijven valt in functie van de elementaire symmetrische functies en dus ook in functie van a, b en c.

Hoofdstuk 2

Veelterm vergelijkingen

1. Bestaan er ook elementaire symmetrische functies voor een willekeurige veeltermvergelijking ?
2. Hoeveel elementaire symmetrische functie zijn er dan?
3. Wat zijn eigenlijk *elementaire* symmetrische functies ?
4. Is elke symmetrische uitdrukking van de nulpunten van de veeltermverglijking te schrijven in functie van de elementaire symmetrische functies?

Laten we eerst even proberen met een derdegraads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ en veronderstel dat er 3 reële nulpunten zijn. Dan is:

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d =& a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
=& a(x - x_1)(x^2 - x_2x - x_3x + x_2x_3) \\
=& a(x^3 - x_2x^2 - x_3x^2 + x_2x_3x - x_1x^2 + x_1x_2x \\
& + x_1x_3x - x_1x_2x_3) \\
=& ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x \\
& - ax_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat:

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\
S_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\
S_1 &= x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}
\end{aligned}$$

De uitdrukkingen S_1, S_2 en S_3 noemen we de elementaire symmetrische functies van de wortels van de derdegraadsvergelijking.
Het zijn de sommen van alle mogelijke producten van 1,2,of 3 factoren van wortels van de gegeven vergelijking.
Veralgemenen we dit nu voor een willekeurige veeltermvergelijking:

Stelling 2.1. *Voor een willekeurige n-de graadsvergelijking* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$*, met n reële oplossingen* $x_1, \cdots, x_n$*, geldt:*

$$S_{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{a_k}{a_n}$$

waarbij S_k *de k-de elementaire symmetrische functie is, dus de som van alle producten van k verschillende factoren van wortels van de gegeven vergelijking. Definieer* $S_k = 0$ *als* $k > n$*.*

Stelling 2.2. *Voor een willekeurige n-de graadsvergelijking* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$*, met n reële oplossingen* $x_1, \cdots, x_n$*, geldt dat elke symmetrische uitdrukking van de oplossingen kan geschreven worden met behulp van de elementaire symmetrische functies.*

We spreken van *elementaire* symmetrische functies omdat ze bouwstenen zijn voor alle andere symmetrische uitdrukkingen van de wortels van de veeltermvergelijking.

Hoofdstuk 3

Enkele toepassingen

Voorbeeld 1: Bepaal de som en het product van de oplossingen van de vergelijking:

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$$

Oplossing:
$S_1 = (-1)^1 \dfrac{a_3}{a_4} = -\dfrac{1}{2}$ en $S_4 = (-1)^4 \dfrac{a_0}{a_4} = 2$

Voorbeeld 2: Bepaal b zodat $x^3 + bx - 6 = 0$ drie oplossingen heeft waarvan 1 het dubbele is van een andere.
Oplossing:
Noem de oplossingen x_1, x_2 en x_3, dan geldt:

$$\begin{gathered} x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2x_3 = 6 \end{gathered}$$

Oplossen van dit stelsel geeft $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ en $x_3 = 3$.
Dan is $b = a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7$.

Voorbeeld 3: Bereken de som van de kwadraten van de oplossingen van $x^3 - 7x - 6 = 0$
Oplossing:
Noem de oplossingen x_1, x_2 en x_3, dan geldt:
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0^2 - 2.(-7) = 14.$

Hoofdstuk 4

Formules van Newton

We weten dat elke symmetrische uitdrukking in de n oplossingen van een n-de graads veeltermvergelijking te schrijven is met behulp van de elementaire symmetrische functies van die oplossingen. We kunnen algemene formules opstellen in het geval van de uitdrukkingen

$$P_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

Stelling 4.1. *Voor een willekeurige n-de graadsvergelijking* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$*, met* n *reële oplossingen* $x_1, \cdots, x_n$*, geldt:*

$$k.S_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} S_{k-i} P_i$$

Uitgewerkt geeft dit:
$S_1 = P_1$
$2S_2 = S_1P_1 - P_2$
$3S_3 = S_2P_1 - S_1P_2 + P_3$
$4S_4 = S_3P_1 - S_2P_2 + S_1P_3 - P_4$
...
Of uitgewerkt naar P_k:
$P_1 = S_1$
$P_2 = S_1P_1 - 2S_2$
$P_3 = S_1P_2 - S_2P_1 + 3S_3$
$P_4 = S_1P_3 - S_2P_2 + S_3P_1 - 4S_4$
...

Bereken de som van de vierdemachten van de oplossingen van $x^3 - 7x - 6 = 0$
Oplossing:
Noem de oplossingen x_1, x_2 en x_3, dan geldt:
$S_1 = 0, S_2 = -7$ en $S_3 = 6$.
Dan is:
$P_1 = S_1 = 0$
$P_2 = -2S_2 = 14$
$P_3 = 3S_3 = 18$
$P_4 = -S_2P_2 - 4S_4 = -(-7).14 = 98$
Dus $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 98$.