Bewijzen

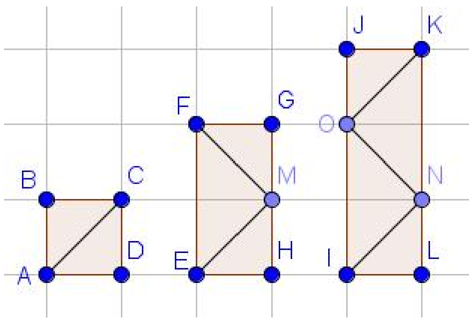
1 Probleemstelling

Gegeven is een biljarttafel van x eenheden op y eenheden met in de vier hoeken een opening. Vanuit de linkerbeneden hoek schiet je een bal weg onder een hoek van 45°. Veronderstel dat elke botsing ideaal verloopt en dat de bal bij het botsen geen snelheid verliest. Proberen we volgende vragen te beantwoorden:

1. Zal de bal in een van de vier hoeken terechtkomen? En zo ja , in welke zal dat zijn?
2. Hoeveel keer zal de bal tegen een zijkant van de tafel botsen? Als de bal in een gat verdwijnt, dan tellen we dat mee als een bots.

2 Op verkenning

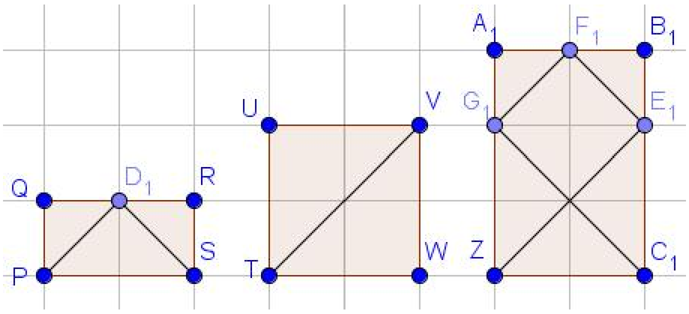
2.1 Een $1 \times y$ tafel



We stellen vast dat:

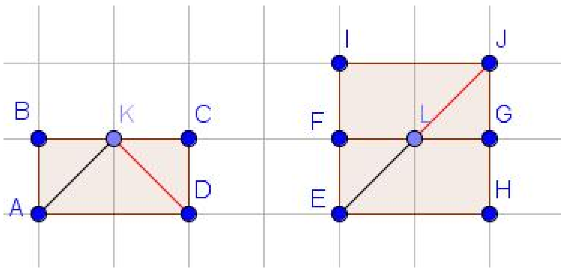
- De bal verdwijnt steeds in een van de hoeken bovenaan.
- Rechtsbovenaan als y oneven is en linksbovenaan als y even is.
- De bal zal y keer botsen.

2.2 Een $2 \times y$ tafel



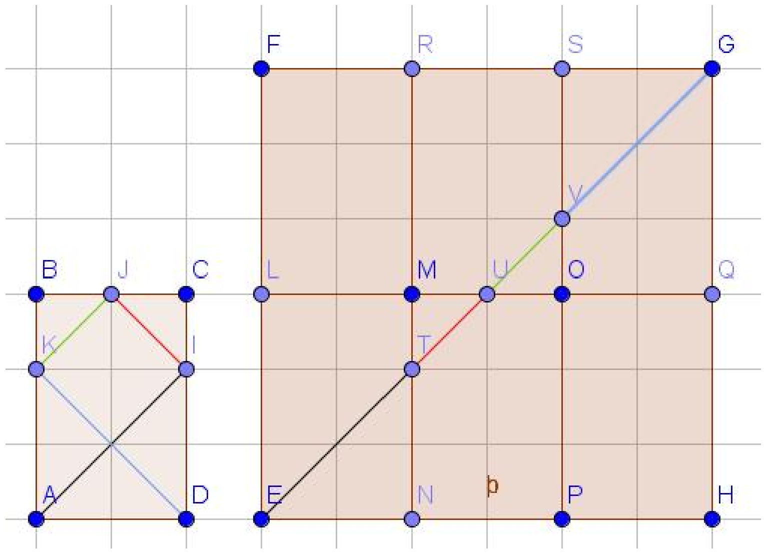
- Een 2×2 kan je eigenlijk herleiden tot een 1×1 tafel. Daarvan hebben we het resultaat al gevonden. Algemeen als $y = 2y'$ kan je een $2 \times y$ tafel steeds herleiden tot een $1 \times y'$ tafel. Veronderstel verder dat y oneven is.
- De bal verdwijnt steeds rechtsonderaan.
- De bal zal $y + 1$ keer botsen.

Laten we een 2×1 tafel eens anders bekijken:



We hebben de 2×1 rechthoek gespiegeld rond $[B, C]$. We bekomen zo een 2×2 vierkant. De baan van de biljartbal in de eerste tekening is AKD en daarmee correspondeert in de tweede tekening de baan ELJ. Zo wordt de baan eigenlijk de diagonaal van het 2×2 vierkant. We hebben naar boven gespiegeld omdat de bal tegen de bovenzijde van het biljart botst.

Kunnen we dit ook doen voor de 2×3 tafel?



Wat valt ons nu op?

- We bouwen een vierkant met zijde $2.3 = 6$. We zien 6 kopies van onze 2×3 tafel.

- De weg, afgelegd door de biljartbal, is de diagonaal van het vierkant.

- Wanneer de bal in de rechtertekening een verticale lijn snijdt, dan botst de bal in de linkertekening tegen de rechterkant of de linkerkant.

- Wanneer de bal in de rechtertekening een horizontale lijn snijdt, dan botst de bal in de linkertekening tegen de onderkant of de bovenkant.

- Het aantal botsingen is het aantal keer dat je een verticale of een horizontale lijn snijdt, verminderd met 1, omdat je in de rechterbovenhoek van het vierkant tegelijkertijd de horizontale en verticale lijn snijdt.

3 Algemene oplossing

- Als bij een $x \times y$ tafel, x en y niet onderling ondeelbaar zijn, delen we die waarden door de grootste gemene deler, van x en y. Stel $d =$ ggd (x, y). Verder is $x = d.x'$ en $y = d.y'$. De oplossing voor de $x \times y$ tafel is de oplossing voor de $x' \times y'$ tafel, waarbij x' en y' onderling ondeelbaar zijn.

- Vanaf nu veronderstellen we dus dat x en y onderling ondeelbaar zijn.

- **Stelling 1.** *De bal zal $x + y - 1$ keer tegen de kant botsen alvorens in 1 van de hoeken terecht te komen.*

Bewijs. Teken een vierkant met zijde $x.y$. Teken y verticale lijnen (bij $x, 2x, \cdots, y.x$) . Teken x horizontale lijnen (op hoogte $y, 2y, \cdots, x.y$). De baan van de biljartbal is de diagonaal van dit vierkant. Elke bots correspondeert met een snijpunt van die diagonaal met een verticale of horizontale lijn, waarbij het snijpunt rechtsboven dubbel geteld wordt. Bijgevolg zijn er $x + y - 1$ botsingen. □

- **Stelling 2.** *Als x en y oneven zijn komt de bal terecht in de rechterbovenhoek.*

Bewijs. Bij elke verticale lijn, met een oneven veelvoud van x, wordt de rechterkant van het biljart geraakt. Bij elke horizontale lijn, met een oneven veelvoud van y, wordt de bovenkant van het biljart geraakt. De bal eindigt dus rechtsboven. □

- **Stelling 3.** *Als x even is en y oneven, komt de bal terecht in de rechterbenedenhoek.*

Bewijs. Bij elke verticale lijn, met een oneven veelvoud van x, wordt de rechterkant van het biljart geraakt. Bij elke horizontale lijn, met een even veelvoud van y, wordt de onderkant van het biljart geraakt. De bal eindigt dus rechtsonder. □

- **Stelling 4.** *Als x oneven is en y even, komt de bal terecht in de linksbovenhoek.*

Bewijs. Bij elke verticale lijn, met een even veelvoud van x, wordt de linkerkant van het biljart geraakt. Bij elke horizontale lijn, met een oneven veelvoud van y, wordt de bovenkant van het biljart geraakt. De bal eindigt dus linksboven. □