Wegen van munten

1 Inleiding

We hebben 13 muntstukken, waarvan er eentje vals is. De enige manier waarop de valse munt zich van de echte munten onderscheidt is door zijn gewicht. We beschikken over een weegschaal zonder gewichtaanduiding. Wat is het minimum aantal wegingen dat we moeten doen om te bepalen welke munt vals is?
In deze tekst gaan we dit probleem proberen op te lossen en stellen we nog een aantal bijkomende onderzoeksvragen:

1. Gegeven een aantal munten waarvan er eentje vals is en gegeven zijn k wegingen. Je weet dat het valse muntstuk zwaarder is dan een echte muntstuk. Wat is maximum aantal muntstukken waaruit je zeker het valse kan identificeren?

2. Wat als je niet weet dat het valse muntstuk zwaarder of lichter is dan de anderen?

3. Wat als je ook moet achterhalen dat het valse muntstuk zwaarder of lichter is dan de echte?

2 Probleem 1

We starten ons onderzoek met de vraag : Gegeven een aantal munten waarvan er eentje vals is en gegeven zijn k wegingen. Je weet dat het valse muntstuk zwaarder is dan een echte muntstuk. Wat is maximum aantal muntstukken waaruit je zeker het valse kan identificeren?

- We nemen $k = 1$, dus 1 weging. Als je 2 munten hebt waarvan er 1 vals is en zwaarder weegt van de andere, dan is het duidelijk dat 1 weging volstaat. Maar ook als je 3 munten (a, b en c) hebt lukt het met 1 weging. Weeg a af tegen b. Als de weegschaal niet in evenwicht is zie je onmiddellijk welke munt de zwaarste is en heb je dus de valse gevonden. Als de weegschaal in evenwicht was, dan is uiteraard c de valse munt.

- Voor 4 munten (a, b, c en d) heb je 2 wegingen nodig. Weeg a, b af tegen c, d. Evenwicht is onmogelijk want er is zeker een valse munt. Dus 1 kant zal zwaarder zijn dan de andere. Neem de twee munten van die kant en weeg ze af tegen elkaar. De zwaarste geeft dan de valse munt.

- Maar het kan, in 2 wegingen ook voor 9 munten. Verdeel ze in 3 hoopjes van 3 munten en weeg 2 hoopjes tegen elkaar af. Zijn ze in evenwicht dan ligt de valse munt in het derde hoopje. Zijn ze niet in evenwicht dan weet je zowieso in welk hoopje de valse ligt. Maar als je 3 munten hebt, waar van 1 valse, dan weten we dat we die valse kunnen identificeren met 1 weging. Dus hebben we in het totaal maar 2 wegingen nodig.

- Voor 3 wegingen hebben we maximaal 27 munten. Want die kunnen we verdelen in 3 hoopjes van 9. We hebben 1 weging nodig om het hoopje te bepalen waarin de valse munt zit en we hebben 2 wegingen nodig om in dat hoopje van 9 munten te bepalen welke de valse munt is.

- Algemeen kunnen we stellen dat uit we maximaal 3^k munten mogen hebben om in k wegingen, de valse munt te kunnen onderscheiden van de echte als we tenminste vooraf weten dat die valse munt zwaarder (of lichter) is dan de echte munten.

We kunnen de zwaardere valse munt er ook uit halen op een andere manier. We maken gebruik van het drietalling stelsel. Proberen we eens uit of we bij 9 munten in 2 wegingen de valse munt kunnen vinden. We geven alle muntstukken een code: 00,01,02,10,11,12,20,21,22. Elke weging krijgt ook een nummer: 0 als de linkerkant zwaarder is, 1 bij evenwicht en 2 als de rechterkant zwaarder is. Veronderstel even dat 11 de valse munt is. Weeg alle munten die met 0 beginnen af tegen alle munten die met 2 beginnen. Dus munten 1,2 en 3 tegen munten 7,8 en 9. We zien dat de weegschaal in evenwicht is, dus we noteren een 1. Weeg nu alle munten met 0 op de tweede plaats af tegen alle munten met een 2 op de tweede plaats. Dit zijn de munten 1,4 en 7 tegen de munten 3,6 en 9. Ook nu is de weegschaal in evenwicht, dus we noteren weer een 1. We besluiten dat 11 de valse munt is. Deze techniek kan gemakkelijk veralgemeend worden voor k wegingen. We hebben dan maximaal 3^k munten, die allemaal genummerd kunnen worden met k symbolen in het drietallig stelsel. Elke weging geeft bij wijze van spreken

3 informatiebits (0,1 of 2). Bij k wegingen kunnen we dus 3^k mogelijke uitkomsten en kunnen we dus uit 3^k munten de valse aanwijzen.

3 Probleem 2

Wat gebeurt er nu als we niet weten of de valse munt zwaarder of lichter is dan de echte munten. Als bij weging de weegschaal naar links uitslaat, dan weten we niet of de valse munt in de linkerschaal ligt en zwaarder is dan de andere munten of dat ze in de rechterschaal ligt en lichter is dan de andere munten. Veronderstellen we ook even dat er eventueel geen valse munt kan zijn. We beschikken bij k wegingen over 3^k mogelijke informatiebits. Maar in plaats van n mogelijke posities voor de valse munt hebben we nu $2n + 1$ mogelijkheden ($2n$ omdat de munt zwaarder of lichter kan zijn en 1 als er geen valse munt is). Op die manier kunnen we een mooie bovengrens bepalen voor het aantal munten dan we kunnen hebben: $2n+1 \leq 3^k$ of $n \leq \frac{1}{2}(3^k-1)$. Het blijkt dat die bovengrens niet haalbaar is als we er ook geen valse munt kan zijn en dat de grootst mogelijke waarde voor n gelijk is aan $\frac{1}{2}(3^k - 3)$ als er zeker een valse munt is.

Bestuderen we even het geval dat $k = 3$. Kunnen we bij 13 munten met 3 wegingen de valse munt identificeren als we niet weten of de valse munt zwaarder of lichter is dan de andere munten? We beschikken over 27 codes van 3 symbolen in het drietallig stelsel: 000,001,...,222. Maar we kunnen geen verschil maken tussen de 'spiegelparen' 102 en 120 omdat we niet kunnen weten of het 102 is die zwaarder is dan de anderen of 120 die lichter is. We mogen van elk spiegelpaar dus maar 1 vertegenwoordiger kiezen. Om aan 13 munten te komen moeten we 1 spiegelpaar gewoon weglaten. We laten 000 en 222 dus weg. Rest de vraag hoe we uit een spiegelpaar een vertegenwoordiger kunnen kiezen. We moeten dat zo doen dat er evenveel nullen en twees zijn op elke positie in de code. Een handige manier om hiervoor te zorgen is de keuze zo te doen dat de eerste 2 ongelijke cijfers 01,12 of 20 zijn. We plakken dus volgende codes op de munten: $001, 010, 011, 012, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 220$. Dit zijn er inderdaad 13. Veronderstel dat muntstuk 6 de valse is. Weeg eerst de munten die met 0 beginnen af tegen de munten die met een 2 beginnen. Dus munten $1, 2, 3, 4$ tegen de munten $10, 11, 12, 13$. Dit geeft een evenwicht dus we noteren 1 als resultaat. Weeg nu de munten die een 0 hebben op de tweede plaats af tegen de munten die een 2 hebben op de tweede plaats. Dus munten $1, 10, 11, 12$ tegen munten $7, 8, 9, 13$. ook hier is de weegschaal in evenwicht. We noteren dus nog een 1. Weeg tenslotte de munten die een nul hebben op de derde plaats af tegen de munten die een 2 hebben op de derde plaats. Dus munten $2, 7, 10, 13$ tegen munten $4, 6, 9, 12$. De weegschaal helt over naar rechts dus we noteren een 2. Het munt met code 112, dus muntstuk 6 is het valse muntstuk. Als, bij de laatste weging, de weegschaal neer links zou overhellen (omdat het valse muntstuk lichter was), dan zouden we als code 110 vinden dat niet overeenkomt met een gegeven muntstuk. Neem dan het spiegelpaar 112 en de daarbijhorende munt, nummer 6!

We kunnen deze procedure herhalen voor k wegingen:

- Kies uit elk spiegelpaar de $k-$ code zo dat de eerste 2 ongelijke cijfers 01,12 of 20 zijn.
- Laat het spiegelpaar $00\cdots 0, 22\cdots 2$ volledig weg.
- Weeg alle codes die op de i-de plaats een 0 hebben af tegen de codes die een 2 hebben op plaats i en bepaal zo de i-de plaats van de valse munt.

Besluit: We kunnen uit $\frac{1}{2}(3^k - 1)$ munten met k wegingen de valse munt, waarvan we niet weten of hij zwaarder of lichter is, terugvinden.

4 Probleem 3

Als we nu ook nog willen achterhalen of het valse muntstuk zwaarder of lichter is dan de echte muntstukken, verandert er dan iets? Eenmaal je vastgesteld hebt dat een bepaald muntstuk vals is en je hebt het in 1 van de wegingen gebruikt, dan kan je daar zien of het zwaarder of lichter is. Er is echter een probleem als je het valse muntstuk nooit gewogen hebt. Dit gebeurt als je alle andere munten gewogen hebt en je vastgesteld hebt dat ze allemaal eenzelfde gewicht hebben. De niet gewogen munt is dan de valse. daardoor wordt het maximaal aantal munten dat je kan hebben dus met 1 verminderd en vindt je dat we bij $\frac{1}{2}(3^k - 3)$ munten in k wegingen kunnen bepalen welke munt vals is en we kunnen ook zeggen of hij zwaarder of lichter is. In het voorbeeld met 3 wegingen moet je bij de 13 overgebleven codes , de code 111 weglaten en de procedure toepassen op de 12 overige munten.