Bewijs door inductie

1 Bewijs door inductie

Vaak bestaat een probleem erin aan te tonen dat een bepaalde eigenschap geldt voor elk natuurlijk getal. Als je wilt weten of iets waar is voor alle natuurlijke getallen n (dus voor n = 1, 2, 3, . . .), kun je ze niet allemaal afgaan: daar zou je oneindig lang mee bezig zijn. We gaan kijken naar methodes waarmee we toch dingen kunnen bewijzen voor alle natuurlijke getallen. Inductie is eigenlijk een verzameling van bewijstechnieken die de waarheid van een stelling voor alle elementen van een verzameling aantonen door gebruik te maken van de onderliggende structuur van de verzameling. Om de geldigheid te bewijzen van een uitspraak van de vorm "Voor ieder natuurlijk getal n geldt $P(n)$", waarbij $P(n)$ staat voor een bewering (propositie) waarin n voorkomt, maakt men vaak gebruik van deze methode. Ze steunt op het welordeningsprincipe van Peano (1858-1932). Als S een deelverzameling is van $\mathbb{N}$, als $1 \in \mathbb{N}$ en als $k \in \mathbb{N}$ dan is ook $k + 1 \in \mathbb{N}$, dan is $S = \mathbb{N}$.

1. Basisstap: Men bewijst $P(1)$.
2. Inductiehypothese: Men bewijst voor elke k dat als $P(k)$ geldt, dan ook $P(k + 1)$ geldt.

Als in een rij dominostenen de eerste steen wordt omgegooid, volgt de rest. Als je steen 1 een zetje geeft, valt steen 2. Dit gaat eindeloos door, maar je moet wel dat tikje tegen de eerste steen geven en elke steen moet wel de volgende steen omgooien. Dit is een klassieke metafoor voor het principe van de volledige inductie.
Er bestaat ook een andere vorm, die we de sterke inductie noemen:

1. Basisstap: Men bewijst $P(1)$.
2. Inductiehypothese: Men bewijst voor elke k dat als $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ gelden, dan ook $P(k+1)$ geldt.

Het is vrijwel onmogelijk te zeggen wie als eerste het principe van inductie heeft geformuleerd maar de oude Grieken moeten er toch enig idee over gehad hebben. De Persische wiskundige al-Karaji (953-1029) gaf in wezen een bewijs door inductie voor de formule $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Een eerst expliciete formulering van het principe werd gegeven door Pascal in zijn Traité du triangle arithmtique (1665). De term *wiskundige inductie* werd ingevoerd en goed gefundeerd door ondermeer de Britse wiskundige Augustus De Morgan(1806-1871).

2 Voorbeelden

Voorbeeld 1. *Voor elk natuurlijk getal n geldt :*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Bewijs. : De geldigheid van de formule voor $n = 1$ is duidelijk, want $1^2 = \frac{1}{6}.1.(1+1)(2+1)$. Dit is de basisstap. De inductiehypothese : stel dat de formule ook geldt voor alle $n = k$. Dan is:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =& (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2 \\
=& \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
=& \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\
=& \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)
\end{aligned}$$

en dit is precies de formule voor $n = k + 1$. □

Voorbeeld 2. *Bewijs dat elk natuurlijk getal groter dan 1 kan worden geschreven als een product van priemgetallen .*

Bewijs. 2 is een priemgetal en is zijn eigen priemontbinding.(basisstap)
Als elke m die voldoet aan $2 \leq m \leq k$ een priemontbinding heeft, dan heeft ook $k+1$ een priemontbinding.(inductiehypothese)
Het bewijs gaat als volgt: Als $k+1$ een priemgetal is, is het zijn eigen priemontbinding. Als $k+1$ niet priem is, dan is $k+1 = mn$ met $2 \leq m, n \leq k$ maar wegens de inductiehypothese hebben m en n een priemontbinding. Dit betekent dat $k+1$ een priemontbinding heeft.

□

Voorbeeld 3. *Teken n rechten in het vlak. Bewijs dat de gebieden die op deze manier ontstaan, zo gekleurd kunnen worden met blauw en zwart, dat geen twee aan elkaar grenzende gebeiden dezelfde kelur hebben.*

Bewijs. Voor $n = 1$ zijn er 2 gebieden. Die kleuren we zwart en blauw. Hiermee is de basisstap bewezen. Veronderstel nu dat we de gebieden, gevormd door k rechten, altijd met blauw en zwart kunnen kleuren zodat geen 2 aan elkaar grenzende gebieden dezelfde kleur hebben. Neem nu $k+1$ rechten. Neem 1 rechte l weg en kleur de overblijvende gebieden volgens de regels. Rechte l verdeelt het vlak in 2 halfvlakken. In 1 van die halfvlakken laten we alle gebieden hun kleur behouden. In het andere halfvlak veranderen we de gebieden van kleur. Neem nu 2 gebieden die aan elkaar grenzen:

- Hun grens ligt op l. Dan zijn ze ontstaan uit een gebied dat 1 kleur had. Maar we hebben de kleur in 1 deel veranderd. Dus hebben ze nu een verschillende kleur.
- Hun grens ligt in een gebied waar we niets veranderd hebben. Maar dan weten we, uit onze veronderstelling, dat ze een verschillende kleur hebben.
- Hun grens ligt in het gebied waar we alle kleuren veranderd hebben. Oorspronkelijk hadden ze een verschillende kleur. Na het veranderen van de kleuren is dat nog steeds zo.

Hiermee is de inductiehypothese bewezen. □

We geven een voorbeeld van een foute toepassing van een inductiebewijs. We willen bewijzen dat alle koeien dezelfde kleur hebben. Dus $P(n)$ betekent dat in een verzameling van n koeien, alle koeien dezelfde kleur hebben. De basisstap $P(1)$ is evident. Stel dat $P(k)$ geldt. Neem een verzameling van $k+1$ koeien. Laat de laatste koe weg uit de verzameling, dan weten we dat de eerste kk koeien dezelfde kleur hebben. laten we de eerste koe weg uit onze verzameling van $k+1$ koeien, dat hebben de laatste k koeien dezelfde kleur. Maar dan hebben alle $k+1$ koeien dezelde kleur. Dus lijkt onze stelling, dat alle koeien dezelfde kleur hebben, bewezen te zijn. De fout in de redenering is dat de inductiehypothese moet gelden voor elke waarde van k. En daar ligt juist de fout, want voor $k = 1$ werkt de inductiehypothese niet. Uit $P(1)$ volgt niet $P(2)$.

3 Problemen oplossen

Voorbeeld 4. *Definieer voor elk natuurlijk getal n: $a(n)$ = het aantal factoren 2 in de priemontbinding van n. Zoek een formule voor $S(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(2^n)$.*

Bewijs. Proberen we eerst $S(n)$ te bereken voor kleine waarden van n.

- $S(1) = a(1) + a(2) = 0 + 1 = 1$.
- $S(2) = a(1) + a(2) + a(3) + a(4) = 0 + 1 + 0 + 2 = 3$.
- $S(3) = a(1) + a(2) + \cdots + a(8) = 3 + 0 + 1 + 0 + 3 = 7$
- $S(4) = a(1) + a(2) + \cdots + a(4) = 7 + 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 4 = 15$

We vermoeden dat $S(n) = 2^n - 1$. Bewijzen we dit via inductie.
$S(1) = 2^1 - 1 = 1$, dus de basisstap is bewezen. Veronderstel nu dat $S(k) = 2^k - 1$. Nu is $S(k+1)$ het aantal factoren 2 in de ontbinding van de getallen $1, 2, \cdots, 2^{k+1}$. Laten we alle oneven getallen weg, want die hebben toch geen priemfactor 2 in hun ontbinding. Dan blijven de getallen $2, 4, 6, 8, \cdots, 2^{k+1}$ over. Als we die getallen allemaal delen door 2, dan bekomen we de getallen $1, 2, 3, 4, \cdots, 2^k$. We hebben dus al 2^k factoren 2 weggezet. Van de overblijvende getallen weten we dat ze samen $S(k)$ priemfactoren 2

bevatten. Dus

$$\begin{aligned} S(k+1) =& S(k) + 2^k \\ =& 2^k - 1 + 2^k \\ =& 2.2^k - 1 \\ =& 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Hiermee is de inductiehypothese bewezen. $\square$

4 Opgaven

1. Bepaal een formule voor $(1 + 2 + \cdots + n)^3$ en bewijs de formule.
2. Bewijs
$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$
3. Bewijs dat $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ een 7-voud is voor voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.
4. Bewijs
$$\forall n \in \mathbb{N} : 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \cdots (n+1)2^n = n.2^{n+1}$$
5. Vind en bewijs een formule voor
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$
6. Bewijs $\forall n \geq 4 : n! > 2^n$.
7. Bewijs voor elk reeël getal $x > -1$ en voor elk natuurlijk getal, verschillend van 0, dat $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
8. Stel f_n het n-de Fibonaccigetal. Bewijs:
$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n.f_{n+1}$$
.

9. Stel f_n het n-de Fibonaccigetal. Bewijs:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

.

10. Stel f_n het n-de Fibonaccigetal. Bewijs: $f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$.

11. Als je een willekeurig vierkantje wegneemt van een $2^n \times 2^n$ schaakbord, dan kan je de resterende vierkantjes allemaal bedekken met L-vormige triominoes.

12. In een bepaald land is elke stad verbonden met elke andere stad door middel van een éénrichtings weg. Bewijs dat er een stad bestaat van waaruit je naar elke andere stad kan rijden.

13. $a_1 = 1, a_2 = 2$ en $a_{n+2} = a_n^2 + 2.a_{n+1}$ voor $n \geq 1$. Bewijs dat alle getallen a_{2n+1} oneven zijn.

14. Bestaat er een getal van de vorm $444 \cdots 4443$ (allemaal 4'en en op het eind een 3) dat deelbaar is door 13? Zo ja, geef dan een getal van die vorm dat deelbaar is door 13; zo nee, bewijs dan dat er niet zo'n getal is.

15. Bewijs voor alle natuurlijke getallen $n > 1$ dat

$$1.3.5. \cdots .(2n-1) < n^n$$