Hoofdstuk 8

Eenheden van $\mathbb{Z}C_7$

8.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}C_7$

Stel $C_7 = \{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6\}$ de cyclische groep van orde 7. Definieer vervolgens $\mathbb{Q}C_7 = \{\sum_{i=0}^{i=6} a_i g^i : a_i \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}C_7, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

C_7 is een abelse groep met zeven toevoegingsklassen en dus zeven irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{array}{l}
\rho_1 : C_7 \to \mathbb{Q} : g \mapsto 1 \\
\rho_2 : C_7 \to \mathbb{Q}(\epsilon_7) : g \mapsto \epsilon_7 \\
\rho_3 : C_7 \to \mathbb{Q}(\epsilon_7) : g \mapsto \epsilon_7^2 \\
\rho_4 : C_7 \to \mathbb{Q}(\epsilon_7) : g \mapsto \epsilon_7^3 \\
\rho_5 : C_7 \to \mathbb{Q}(\epsilon_7) : g \mapsto \epsilon_7^4 \\
\rho_6 : C_7 \to \mathbb{Q}(\epsilon_7) : g \mapsto \epsilon_7^5 \\
\rho_7 : C_7 \to \mathbb{Q}(\epsilon_7) : g \mapsto \epsilon_7^6
\end{array}$$

Hierbij is $\epsilon_7^7 = 1$ of $\epsilon_7^6 = -\epsilon_7^5 - \epsilon_7^4 - \epsilon_7^3 - \epsilon_7^2 - \epsilon_7 - 1$.
Bovendien is $\mathbb{Q}(\epsilon_7) = \{a + b\epsilon_7 + c\epsilon_7^2 + d\epsilon_7^3 + e\epsilon_7^4 + f\epsilon_7^5$ met $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}\}$.
We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}C_7$. Noteer $x = \sum_{i=0}^{i=6} a_i g^i$, dan is:

$$\rho_1(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$\rho_2(x) = (a_0-a_6)+(a_1-a_6)\epsilon_7+(a_2-a_6)\epsilon_7^2+(a_3-a_6)\epsilon_7^3+(a_4-a_6)\epsilon_7^4+(a_5-a_6)\epsilon_7^5$$

$$\rho_3(x) = (a_0-a_3)+(a_4-a_3)\epsilon_7+(a_1-a_3)\epsilon_7^2+(a_5-a_3)\epsilon_7^3+(a_2-a_3)\epsilon_7^4+(a_6-a_3)\epsilon_7^5$$

$$\rho_4(x) = (a_0-a_2)+(a_5-a_2)\epsilon_7+(a_3-a_2)\epsilon_7^2+(a_1-a_2)\epsilon_7^3+(a_6-a_2)\epsilon_7^4+(a_4-a_2)\epsilon_7^5$$

$$\rho_5(x) = (a_0-a_5)+(a_2-a_5)\epsilon_7+(a_4-a_5)\epsilon_7^2+(a_6-a_5)\epsilon_7^3+(a_1-a_5)\epsilon_7^4+(a_3-a_5)\epsilon_7^5$$

$$\rho_6(x) = (a_0-a_4)+(a_3-a_4)\epsilon_7+(a_6-a_4)\epsilon_7^2+(a_2-a_4)\epsilon_7^3+(a_5-a_4)\epsilon_7^4+(a_1-a_4)\epsilon_7^5$$

$$\rho_7(x) = (a_0-a_1)+(a_6-a_1)\epsilon_7+(a_5-a_1)\epsilon_7^2+(a_4-a_1)\epsilon_7^3+(a_3-a_1)\epsilon_7^4+(a_2-a_1)\epsilon_7^5$$

We definiëren tenslotte: $\rho = (\rho_1, \rho_2) : \mathbb{Q}C_7 \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_7)$ via

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

Hierbij is de eerste component $\rho_1(x)$ en de andere componenten zijn de coëfficiënten van ϵ_7^i met $i : 0, 1, \cdots, 5$ in $\rho_2(x)$. Het is duidelijk dat:

Stelling 8.1. $\mathbb{Q}C_7 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_7)$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

8.2 De groepsring $\mathbb{Z}C_7$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_7)$ is de ring der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_7)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}C_7$ noteren we met H. Uiteraard is $\mathbb{Z}C_7$ een deel van H omdat elk element van $\mathbb{Z}C_7$ afgebeeld wordt op een element van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_7)$. Dus $\mathbb{Z}C_7 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}C_7$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{7}(1 + g + g^2 + g^3 + g^4 + g^5 + g^6)$ een geheel van $\mathbb{Q}C_7$ omdat $x^2 - x = 0$ en toch is x geen element van $\mathbb{Z}C_7$. Bijgevolg komt $\mathbb{Z}C_7$ slechts overeen met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_7)$.

Stelling 8.2. $\mathbb{Z}C_7 \cong \{(x, y+z\epsilon_7+t\epsilon_7^2+u\epsilon_7^3+v\epsilon_7^4+w\epsilon_7^5) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(\epsilon_7) : x \equiv y+z+t+u+v+w \ mod\ 7\}$

Bewijs. Noteer $\rho(\mathbb{Z}C_7 5) = A$. Dan geldt:$(x, y+z\epsilon_7+t\epsilon_7^2+u\epsilon_7^3+v\epsilon_7^4+w\epsilon_7^5) \in A$

$$\iff \exists a, b, \cdots, g \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, b, \cdots, g \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\iff x + 6y - z - t - u - v - w \equiv 0 \text{ mod } 7$$
$$\iff x \equiv y + z + t + u + v + w \text{ mod } 7$$

□

8.3 Eenheden in $\mathbb{Z}C_7$

De eenheden in $\mathbb{Z}(\epsilon_7)$ zijn niet allemaal triviaal. Er zijn $\frac{\phi(7)}{2} - 1 = 2$ fundamentele eenheden. Deze zijn van de vorm $\dfrac{\epsilon_7^a - 1}{\epsilon_7 - 1}$ met $1 < a < \frac{7}{2}$ en a en 7 onderling ondeelbaar. Dus moet $a = 2$ of $a = 3$, en krijg je als fundamentele eenheden ϵ_7+1 en $\epsilon_7^2+\epsilon_7+1$. Bijgevolg is $U(\mathbb{Z}(\epsilon_7)) = \{\pm\epsilon_7^n(1+\epsilon_7)^p(1+\epsilon_7+\epsilon_7^2)^q\}$.

Stelling 8.3. $U(\mathbb{Z}C_7) = \pm C_7.\, \langle g^2 + g^5 - 1\rangle \,.\, \langle 1 + g - g^4\rangle$

Bewijs. We bepalen eerst de eenheden in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_7)$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_7)) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}(\epsilon_7))$. Dus $\alpha \in U(\mathbb{Z}C_7)$ als $\rho_1(\alpha) = \pm 1$ en $\rho_2(\alpha) = \pm\epsilon_7^n(1+\epsilon_7)^p(1+\epsilon_7+\epsilon_7^2)^q$. Maar ρ_2 is niet injectief, want $\rho_2(a+bg+cg^2+dg^3+eg^4+fg^5+hg^6) = 0 \iff a = b = c = d = e = f = h$, zodat

$\ker(\rho_2) = \mathbb{Z}(1+g+g^2+g^3+g^4+g^5+g^6)$. Uit $\rho_2(\alpha) = \pm\epsilon_7^n(1+\epsilon_7)^p(1+\epsilon_7+\epsilon_7^2)^q$ volgt dan dat $\alpha = \pm g^n(1+g)^p(1+g+g^2)^q + k(1+g+g^2+g^3+g^4+g^5+g^6)$. We zoeken nu of er waarden zijn voor k, n , p en q waarvoor $\rho_1(\alpha) = \pm 1$. Dan moet $\pm 2^p.3^q + 7k = \pm 1$. Volgens S.K.Sehgal is $U(\mathbb{Z}C_7) = C_7 \times F$ waarbij F een vrije abelse groep is van rang $\frac{1}{2}(7-3) = 2$. Als we dus 2 onafhankelijke eenheden hebben in $U(\mathbb{Z}C_7)$ dan kennen we gans $U(\mathbb{Z}C_7)$. Voor $p = 3$ en $n = q = 0$ vinden we $2^3 + 7k = 1$ of $k = -1$. De overeenkomstige eenheid is $g(2+2g-g^3-g^4-g^5)$. Kan het iets eenvoudiger? Voor $n = 0$, $p = 2$ en $q = -1$ vinden we $2^2.3^{-1} + 7k = -1$ of $-8 + 7k = -1$ of $k = 1$. De overeenkomstige eenheid is $(1+g)^2(-g-g^4) + (1+g+\cdots+g^6) = -(g^2+g^5-1)$. Voor $n = 0$, $p = -1$ en $q = 2$ vinden we $2^{-1}.3^2 + 7k = 1$ of $-27 + 7k = 1$ of $k = 4$. De overeenkomstige eenheid is $-(g+g^3+g^5)(1+g+g^2)^2 + 4(1+g+\cdots+g^6) = g(1+g-g^4)$. Hieruit volgt het gestelde.

$\square$