1 Onderzoeksvraag

We onderzoeken welke van de twee getallen a^b of b^a het grootst is. Voor eenvoudige getallen is dat niet zo moeilijk. Zo vinden we dat $2^3 < 3^2$, $2^4 = 4^2$ en $2^5 > 5^2$. Maar wat weet je over 3^π en π^3? We veronderstellen in het verdere verhaal dat $a < b$ en $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$.

2 Onderzoek

- We weten dat $a^b < b^a \Longleftrightarrow e^{b \ln a} < e^{a \ln b}$. Omdat $y = e^x$ een stijgende functie is volstaat het dus van te bewijzen dat $b \ln a < a \ln b$. Omdat a en b strikt positief zijn krijgen we dus dat

$$a^b < b^a \Longleftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$$

- Onderzoek van de functie $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ zal ons dus meer klaarheid bezorgen.

1. dom $f = \mathbb{R}_0^+$.
2. De Y-as is een verticale assymptoot want

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

3. Gebruik makend van de regel van de l'Hôpital vinden we:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

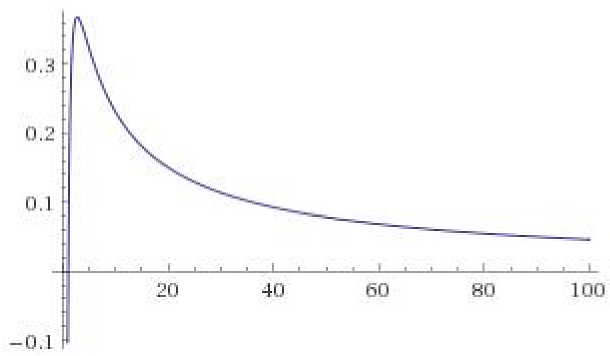
Dus de X-as is een horizontale assymptoot.

4. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

		0		e	
$f'(x)$		$\backslash$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\backslash$	$\nearrow$	M	$\searrow$

5. Omdat $f(e) = \dfrac{1}{e}$ is het bereik van f gelijk aan $\left]-\infty, \dfrac{1}{e}\right]$.

6. De grafiek, met dank aan wolfram alpha, is gegeven door



7. Uit het stijgend zijn van de functie voor $x = e$ en het dalend zijn erna, kunnen we de eerste conclusies maken:

   Stelling 1. *Als $0 < a < b \leq e$, dan is $a^b < b^a$.*

   Stelling 2. *Als $e \leq a < b$, dan is $a^b > b^a$.*

8. Als we een $a < e$ en een $b > e$ nemen, dan ligt de situatie heel wat lastiger. Als $a < 1$, dan is $f(a) < 0$ en kan b om het even welke waarde aannemen. Als $1 < a < e$, dan bestaat er een unieke $d > e$ met $f(a) = f(d)$. Op de grafiek zien we dat als $e < b < d$, dan is $f(a) < f(b)$. Als $b > d$ dan is $f(a) > f(b)$, zodat we uiteindelijk kunnen besluiten dat:

   Stelling 3. *Als $a < 1$ en $a < b$, dan is $a^b < b^a$.*

   Stelling 4. *Als $1 < a < e$ dan bestaat er een unieke $d > e$ met $a^d = d^a$ en als $b > d$ dan is $a^b > b^a$. Als $e < b < d$, dan is $a^b < b^a$.*

3 Besluit

Als we twee getallen a en b nemen, kleiner dan e, met $a < b$, dan is $a^b < b^a$. Bijvoorbeeld: $2^3 < 3^2$.
Als we twee getallen a en b nemen, groter dan e, met $a < b$, dan is $a^b > b^a$. Bijvoorbeeld: $4^5 > 5^4$. En dus ook $3^\pi > \pi^3$
Als we a kleiner dan e en b groter dan e nemen, is het geval waarbij $a < 1$ triviaal. Neem dus a ergens tussen 1 en e, zoek dan de unieke d met $a^d = d^a$ en vergelijk b met d. Is b groter dan d dan is ook $a^b > b^a$. Bijvoorbeeld $2^5 > 5^2$, waarbij $d = 4$. Is b kleiner dan d, dan is ook $a^b < b^a$. Bijvoorbeeld: $2^\pi < \pi^2$.