Ruimtemeetkunde deel 1

1 Punten

- We weten reeds dat Π_0 het meetkundig model is voor de vectorruimte $\mathbb{R}^2$. We definiëren nu op dezelfde manier E_0 als meetkundig model voor de vectorruimte $\mathbb{R}^3$.
- De elementen van E_0 noemen we punten. Punten kan je dus optellen en vermenigvuldigen met reële getallen. We noteren punten zowel met een hoofdletter als met een kleine letter. We verkiezen kleine letters als we bewerkingen uitvoeren op de punten .
- Een basis voor E_0 stellen we voor door $\{e_1, e_2, e_3\}$ waarmee $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ correspondeert in $\mathbb{R}^3$.
- Elk punt P van E_0 kan dan op juist één manier geschreven worden als lineaire combinatie van die basis : $P = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3$. Korter genoteerd als $P(x, y, z)$. Men noemt (x, y, z) het coördinatendrietal van P.

2 Vectoren

- Zijn a en b twee punten van E_0, dan noemt men $b-a$ de vector bepaald door (a, b). We noteren $\overrightarrow{AB} = b - a$.
- Een vector is, als verschil van twee punten, dus ook een punt.
- Omgekeerd is elk punt p ook te schrijven als $p = p - o = \overrightarrow{OP}$. Dus het punt p komt overeen met de vector bepaald door (o, p).
- Als $a(x_1, y_1, z_1)$ en $b(x_2, y_2, z_2)$, dan noemen we $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ de coördinaten van vector $\overrightarrow{AB}$.

- Het midden van het koppel punten (a, b) wordt gedefinieerd als het punt m met $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Stelling 2.1. *Als m het midden is van (a, b), dan is*

$$m = \frac{a+b}{2}$$

.

Bewijs. Uit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ volgt dat $m - a = b - m$ of $2.m = a + b$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

- Het zwaartepunt z van een driehoek ABC verdeelt een zwaartelijn in stukken die zich verhouden als 2 : 1, zodat $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, waarbij m het midden is van (b, c).

Stelling 2.2. *Als z het zwaartepunt is van driehoek ABC, dan is*

$$z = \frac{a+b+c}{3}$$

.

Bewijs. Uit $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ volgt dat $z - a = \frac{2}{3}(m - a)$. Hierbij is $m = \frac{b+c}{2}$. Dus $3z - 3a = 2m - 2a$ of $3z - 3a = b + c - 2a$. Hieruit volgt dat $3z = a + b + c$. Hiermee is het gestelde bewezen. $\square$

- Op analoge manier kan men bewijzen dat het zwaartepunt z van een viervlak ABCD gegeven wordt door de formule

$$z = \frac{a+b+c+d}{4}$$

3 Deelruimten van E_0

- De dimensie van E_0 is 3. De enige echte deelruimten hebben dus dimensie 1 en 2. De deelruimten van dimensie 1 noemen we vectorrechten en we noteren $a_0, b_0, \cdots$. De deelruimten van dimensie 2 noemen we vectorvlakken en we noteren $\alpha_0, \beta_0, \cdots$.

- Om de onderlinge ligging van vectorrechten en vectorvlakken te bepalen, bestuderen we hun doorsnede.

- We weten dat de doorsnede van twee deelruimten zeker een deelruimte is, waarvan de dimensie kleiner of gelijk is aan de dimensies van de afzonderlijke deelruimten.

- De situatie van twee vectorrechten:

  Stelling 3.1. *Twee vectorrechten zijn ofwel snijdend in o ofwel samenvallend.*

  Bewijs. De dimensie van de doorsnede van twee vectorrechten is ofwel 0 ofwel 1. Als de dimensie 0 is dan hebben die vectorrechten enkel o gemeenschappelijk. De vectorrechten zijn dan snijdend in o. Als de dimensie van de doorsnede 1 is dan is de doorsnede gelijk aan beide vectorrechten en zijn ze dus samenvallend. □

- De situatie van twee vectorvlakken:

  Stelling 3.2. *Twee vectorvlakken zijn ofwel snijdend volgens een vectorrechte ofwel samenvallend.*

  Bewijs. De dimensie van de doorsnede van twee vectorvlakken α_0 en β_0 is ofwel 0 ofwel 1 ofwel 2. Als de dimensie 0 is dan volgt uit de dimensiestelling dat $\dim(\alpha_0 + \beta_0) = 2 + 2 - 0 = 4$ en dat is natuurlijk onmogelijk in de driedimensionele vectorruimte E_0. Als de dimensie van de doorsnede 1 is dan is de doorsnede een vectorrechte en dan snijden de vectorvlakken elkaar volgens deze vectorrechte. Als de dimensie van de doorsnede 2 is dan is de doorsnede gelijk aan beide vectorvlakken en zijn ze dus samenvallend □

- De situatie van een vectorrechte en een vectorvlak:

  Stelling 3.3. *Een vectorrechte snijdt het vectorvlak in o ofwel ligt de vectorrechte in het vectorvlak.*

  Bewijs. De dimensie van de doorsnede van een vectorrechte en een vectorvlak is ofwel 0 ofwel 1. Als de dimensie 0 is dan hebben die vectorrechte en het vectorvlak enkel o gemeenschappelijk. Als de dimensie van de doorsnede 1 is dan is de doorsnede gelijk aan de vectorrechte en ligt die in het vectorvlak. □

- Enkele oefeningen: Bepaal de onderlinge ligging van:

  1. $a_0 = \mathbb{R}(1, 2, 1)$ en $b_0 = \mathbb{R}(2, 4, 2)$.
  2. $a_0 = \mathbb{R}(1, 2, 2)$ en $b_0 = \mathbb{R}(2, 3, 1)$.
  3. $a_0 = \mathbb{R}(2, 1, 2)$ en $\alpha_0 = \mathbb{R}(1, 3, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$.
  4. $a_0 = \mathbb{R}(1, 7, 3)$ en $\alpha_0 = \mathbb{R}(2, 5, 0) + \mathbb{R}(0, 3, 2)$.
  5. $\alpha_0 = \mathbb{R}(0, 1, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 1)$ en $\beta_0 = \mathbb{R}(1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 3, 1)$.
  6. $\alpha_0 = \mathbb{R}(1, 1, 0) + \mathbb{R}(1, 2, 1)$ en $\beta_0 = \mathbb{R}(0, 1, 1) + \mathbb{R}(2, 3, 1)$.

4 Rechten en vlakken

- Een rechte is een nevenklasse van een vectorrechte. Een vlak is een nevenklasse van een vectorvlak. We noteren rechten met $a, b, \cdots$. Rechten en punten worden dus op een zelfde manier voorgesteld. Als er verwarring mogelijk is, dan gebruiken we voor punten hoofdletters. Vlakken worden aangeduid met $\alpha, \beta, \cdots$.

- Net zoals in de vlakke meetkunde bepalen twee verschillende punten juist 1 rechte. Toen hebben we dat als axioma aangenomen. Nu gaan we dat gewoon bewijzen.

  Stelling 4.1. *Twee verschillende punten bepalen juist 1 rechte.*

  Bewijs. Als a en b verschillende punten zijn, dan is $b - a \neq 0$ en is $\mathbb{R}(b - a)$ een 1 dimensionele deelruimte van E_0, een vectorrechte dus. We construeren nu $c = a + \mathbb{R}(b - a)$. Volgens bovenstaande definitie is dit een rechte, als nevenklasse van een vectorrechte. Omdat $a = a + 0.(b - a)$ en $b = a - 1.(b - a)$ zullen a en b op die rechte liggen. Rest ons nog te bewijzen dat deze rechte uniek is. Stel dat er nog een rechte d door a en b gaat. Dan is de vectorrechte geassocieerd met d gegeven door $\mathbb{R}(b - a)$ en dan is $d = a + \mathbb{R}(b - a) = c$. Er is dus maar 1 rechte door a en b. $\square$

- In het vierde jaar hebben we gezien dat drie niet-collineaire punten juist 1 vlak bepalen. We gaan dat nu bewijzen.

  Stelling 4.2. *Drie niet-collineaire punten bepalen juist 1 vlak.*

  Bewijs. Als a,b en c drie niet-collineaire punten zijn, gaan we eerst aantonen dat $b-a$ en $c-a$ lineair onafhankelijk zijn. Stel dat het niet zo is, dan is $c-a=k(b-a)$ of $c=a+k(b-a)$. Maar dit betekent dat c op de rechte door a en b zou liggen, wat niet mogelijk is omdat de drie punten niet-collineair zijn. Bijgevolg is $\mathbb{R}(b-a)+\mathbb{R}(c-a)$ een 2 dimensionele deelruimte van E_0, een vectorvlak dus. Dan is $\alpha=a+\mathbb{R}(b-a)+\mathbb{R}(c-a)$ een vlak. Omdat $a=a+0.(b-a)+0.(c-a)$ en $b=a+1.(b-a)+0.(c-a)$ en $c=a+0.(b-a)+1.(c-a)$, bevat het vlak α de punten a,b en c. Rest ons nog te bewijzen dat dit vlak enig is. Veronderstel dat er nog een tweede vlak β zou bestaan dat ook door a,b en c zou gaan, dan zou $b-a$ en $c-a$ gelegen zijn in β_0 of met andere woorden $\beta_0=\mathbb{R}(b-a)+\mathbb{R}(c-a)$. Maar dan is $\beta=a+\beta_0=\alpha$. De twee vlakken vallen dus samen en bijgevolg is er maar 1 vlak door de punten a,b en c. □

- Opdat alle meetkundige eigenschappen zoals de stelling van Thales, de stelling van Pythagoras en andere, geldig zouden blijven in elk vlak van E_0, hebben we volgende evidente stelling nodig:

  Stelling 4.3. *Als een rechte twee punten gemeen heeft met een vlak, dan ligt die rechte volledig is dat vlak.*

  Bewijs. Stel dat de rechte de punten a en b gemeen heeft met het vlak en veronderstel dat c een punt is van het vlak zodat a,b en c niet collineair zijn. Neem nu een willekeurig punt x van de rechte door a en b, dan is $x=a+k(b-a)$ met $k\in\mathbb{R}$. Maar dat is $x=a+k(b-a)+0.(c-a)$ en dus ligt x in het vlak bepaald door a,b en c. Elk punt van de rechte ligt bijgevolg in het vlak. De rechte ligt dus volledig is het vlak. □

5 Onderlinge ligging van rechten en vlakken

- In het vierde jaar hebben we de onderlinge ligging van rechten en vlakken reeds gezien. We gaan nu na of onze nieuwe aanpak dezelfde resultaten geeft.

- De situatie van twee rechten:

Stelling 5.1. *Twee rechten a en b zijn ofwel samenvallend, disjunct evenwijdig , snijdend of kruisend.*

Bewijs. Wat betreft de vectorrechten a_0 en b_0 weten we dat ze ofwel samenvallen ofwel enkel o gemeenschappelijk hebben.
Als $a_0 = b_0$ en a en b hebben geen enkel element gemeenschappelijk, dan noemen we die rechten disjunct evenwijdig. Stel dat a en b wel een punt p gemeenschappelijk hebben, dan is $a = p + a_0 = p + b_0 = b$. De rechten vallen dus samen.
Bestuderen we nu het geval dat de a_0 en b_0 enkel o gemeenschappelijk hebben. Als a en b geen elementen gemeenschappelijk hebben, dan noemen we die rechten kruisend. Hebben a en b wel een punt p gemeenschappelijk, dan kunnen a en b geen ander punt gemeen hebben. Want stel dat a en b ook q gemeenschappelijk zouden hebben, dan is $q - p \in a_0 \cap b_0 = \{0\}$. Bijgevolg is $q = p$. De rechten a en b zijn dus snijdend. □

- De situatie van twee vlakken:

Stelling 5.2. *Twee vlakken α en β zijn ofwel samenvallend, disjunct evenwijdig of snijdend.*

Bewijs. Wat betreft de vectorrechten α_0 en β_0 weten we dat ze ofwel samenvallen ofwel snijden volgens een vectorrechte.
Als $\alpha_0 = \beta_0$ en α en β hebben geen enkel element gemeenschappelijk, dan noemen we die vlakken disjunct evenwijdig. Stel dat α en β wel een punt p gemeenschappelijk hebben, dan is $\alpha = p + \alpha_0 = p + \beta_0 = \beta$. De vlakken vallen dus samen.
Als $\alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$, dan is $\alpha \cap \beta$ een nevenklasse van s_0. Immers is $\dim(\alpha_0 + \beta_0) = 2 + 2 - 1 = 3$. Bijgevolg is $\alpha_0 + \beta_0 = E_0$. Stel nu dat $\alpha = a + \mathbb{R}b + \mathbb{R}c$ en $\beta = d + \mathbb{R}e + \mathbb{R}f$. Nu brengen b,c,e en f dus E_0 voort, dus is $a = r.b + s.c + t.e + u.f$ en $d = v.b + w.c + x.e + y.f$. Hieruit volgt dat $a - d = (r - v).b + (s - w).c + (t - x).e + (u - y).f$ of $a + (v - r).b + (w - s).c = d + (t - x).e + (u - y).f$. Het linkerlid van de laatste gelijkheid is een element van α en het rechterlid een element van β. Bijgevolg bestaat er zeker een element in $\alpha \cap \beta$. Noem dit element p en definieer $s = p + s_0$. We willen nu aantonen dat $\alpha \cap \beta = s$. Omdat s_0 zowel in α_0 als β_0 ligt , zal s ook is $\alpha \cap \beta$ liggen. Omgekeerd als q een element is van $\alpha \cap \beta$, dan is $q - p \in \alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$. Maar dan is q een element van s. Bijgevolg zullen de twee vlakken elkaar snijden volgens een rechte. □

- De situatie van een rechte en een vlak:

  Stelling 5.3. *Een rechte a en een vlak α zijn ofwel disjunct evenwijdig, ofwel ligt de rechte in het vlak ofwel snijdt de rechte het vlak.*

  Bewijs. Wat betreft de vectorrechte en het vectorvlak weten we dat ze ofwel enkel o gemeenschappelijk hebben ofwel ligt de vectorrechte in het vectorvlak.
  Als $a_0 \subset \alpha_0$ en a en α hebben geen elementen gemeenschappelijk, dan noemen we a en α disjunct evenwijdig. Als ze wel een element p gemeenschappelijk hebben, dan geldt voor elk element x van a dat $x \in p + a_0$. Dan is $x \in p + \alpha_0 = \alpha$. Elk punt van a ligt dus in α. De rechte ligt volledig is het vlak.
  Stel nu dat $a_0 \cap \alpha_0 = \{o\}$, dan is dim $(a_0 + \alpha_0) = 1 + 2 - 0 = 3$ zodat $a_0 + \alpha_0 = E_0$. Stel nu dat $a = p + \mathbb{R}b$ en $\alpha = q + \mathbb{R}c + \mathbb{R}d$. Nu brengen b,c en d dus E_0 voort, zodat $p = r.b + s.c + t.d$ en $q = v.b + w.c + x.d$. Hieruit volgt dat $q - p = (v-r).b + (w-s).c + (x-t).d$ of $p + (v-r).b = q + (s-w).c + (t-x).d$. Het linkerlid van de laatste gelijkheid is een element van a en het rechterlid van α, zodat $a \cap \alpha$ zeker niet leeg kan zijn. Stel dat m en n allebei tot deze doorsnede zouden behoren, dan is $m - n \in a_0 \cap \alpha_0 = \{0\}$ en dus is $m = n$. De rechte en het vlak snijden elkaar in 1 punt. □

6 Vergelijkingen van rechten

6.1 De rechte

- Een vergelijking van een rechte of een vlak opstellen is een nodige en voldoende voorwaarde vinden waaraan een punt moet voldoen om op die rechte of vlak te liggen.

- We weten uit een vroeger resultaat dat de rechte door de punten a en b, ook genoteerd als AB, gegeven wordt door

  $$AB = a + \mathbb{R}(b - a)$$

  We noemen dit de vectorvergelijking van de rechte AB. Dit betekent dat $p \in AB$ als en slechts als er een reëel getal r bestaat zodat $p = a + r.(b - a)$. Als de parameter r de reële getallen doorloopt zal p de rechte AB doorlopen. Als AB geijkt wordt met 0 in a en 1 in b, dan stelt r de abscis voor van p.

- In deze vergelijking noemen we $b-a$ een richtingsvector of richtvector van de rechte. Omdat elk element van de vectorrechte $\mathbb{R}(b-a)$ hiervoor gebruikt kan worden, zeggen we dat een richtvector op een veelvoud na bepaald is. Het punt a in de vergelijking noemen we een steunvector van de rechte AB. Elk element van de rechte kan gebruikt worden als steunvector.

- Als we de vectorvergelijking omzetten naar $\mathbb{R}^3$ en we $p(x,y,z)$, $a(x_1,y_1,z_1)$, $b(x_2,y_2,z_2)$ noteren, dan ligt p op AB als en slechts als $(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + r.(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ of ook

$$\begin{cases} x = x_1 + r.(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + r.(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + r.(z_2 - z_1) \end{cases}$$

  We noemen dit een parametervoorstelling van de rechte AB.

- De cartesiaanse vergelijking van de rechte AB vinden we tenslotte door de nodige en voldoende voorwaarde op te stellen voor het bestaan van een r in de parametervoorstelling van de rechte. Dit betekent dat we de parameter r moeten elimineren uit de 3 bovenstaande vergelijkingen. Dit betekent dat we r uit één vergelijking halen en daarna in de andere twee stoppen. Dit lukt steeds omdat de coëfficiënten van r nooit alle drie nul kunnen zijn. Als alle coëfficiënten verschillend van 0 zijn, dan bekomen we:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

- Merk dus op dat een rechte twee Cartesiaanse vergelijkingen heeft.

6.2 Het vlak

- We weten dat het vlak door de punten a, b en c ook genoteerd als ABC, gegeven wordt door

$$ABC = a + \mathbb{R}(b-a) + \mathbb{R}(c-a)$$

  We noemen dit de vectorvergelijking van het vlak ABC. Dit betekent dat $p \in ABC$ als en slechts als er reële getallen r en s bestaan zodat $p = a + r.(b-a) + s.(c-a)$. Als de parameters r en s de reële getallen doorlopen zal p het vlak ABC doorlopen. Als AB geijkt wordt met 0 in a en 1 in b en AC met 0 in a en 1 in c, dan stelt (r,s) het coördinatenkoppel voor van p ten opzichte van de basis $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ in het vlak ABC.

- We noteren $p(x, y, z)$, $a(x_1, y_1, z_1)$, $b(x_2, y_2, z_2)$ en $c(x_3, y_3, z_3)$. De parametervoorstelling van het vlak ABC is dan:

$$\begin{cases} x = x_1 + r.(x_2 - x_1) + s.(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + r.(y_2 - y_1) + s.(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + r.(z_2 - z_1) + s.(z_3 - z_1) \end{cases}$$

- Om de Cartesiaanse vergelijking van het vlak ABC te vinden, zullen we r en s elimineren uit vorige 3 vergelijkingen. We herschrijven daarvoor dat stelsel als :

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = r. \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s. \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

  Dit betekent dat in volgende determinant $\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$ de eerste kolom een lineaire combinatie is van de tweede en derde kolom, die geen veelvouden van elkaar zijn. Bijgevolg moet de determinant gelijk zijn aan 0. Dit geeft dan de Cartesiaanse vergelijking van het vlak ABC:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Wanneer we deze determinant ontwikkelen volgens de eerste kolom, dan bekomen we een vergelijking van de eerste graad in x,y en z. Dus de Cartesiaanse vergelijking van een vlak is steeds van de vorm
  $ax + by + cz + d = 0$ waarbij a,b en c nooit alle drie 0 zijn.

7 Evenwijdigheid

7.1 Definities

- In tegenstelling tot de benadering van de vlakke meetkunde, kunnen we nu een definitie geven voor het begrip evenwijdigheid door middel van een formule. Als symbool voor evenwijdigheid gebruiken we $\parallel$.

- Twee rechten zijn evenwijdig als hun vectorrechten (ook richtrechten genoemd) samenvallen:

$$a \parallel b \Leftrightarrow a_0 = b_0$$

- Anders geformuleerd: twee rechten zijn evenwijdig als hun richtvectoren evenredig zijn.

- Twee vlakken zijn evenwijdig als hun vectorvlakken (ook richtvlakken genoemd) samenvallen:

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

- Twee vlakken zijn dus evenwijdig als de richtvectoren van het ene vlak lineaire combinaties zijn van de richtvectoren van het andere vlak.

- Vorige omschrijving is niet zo praktisch in de oefeningen. Als $ax + by + cz = d$ de vergelijking is van een vlak α, dan is $ax + by + cz = 0$ de vergelijking van α_0. Dus zijn twee vlakken evenwijdig als, in hun Cartesiaanse vergelijkingen, de coëfficiënten van x,y en z evenredig zijn.

- Een rechte is evenwijdig met een vlak als de vectorrechte gelegen is in het vectorvlak:
$$a \parallel \alpha \Leftrightarrow a_0 \subset \alpha_0$$

- Een rechte is dus evenwijdig met een vlak als de richtvector van de rechte een lineaire combinatie is van de richtvectoren van het vlak. Of beter als de richtvector van de rechte voldoet aan de vergelijking van α_0 ($ax + by + cz = 0$).

7.2 Eigenschappen

- Vooraleer we beginnen met het bewijzen van een aantal stellingen die we reeds kennen uit het vierde jaar, toch even een aantal formules die volgen uit het bestuderen van de onderlinge stand van rechten en vlakken: $a \subset \alpha \Rightarrow a_0 \subset \alpha_0$ en $\alpha \cap \beta = s \Rightarrow \alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$.

- **Stelling 7.1.** *Is een rechte a evenwijdig met een vlak α, en gaat er door die rechte een vlak β dat het eerste snijdt, dan is de snijlijn s evenwijdig met de gegeven rechte.*

  Bewijs. $a \parallel \alpha \Rightarrow a_0 \subset \alpha_0$ en $a \subset \beta \Rightarrow a_0 \subset \beta_0$. Maar dan is $a_0 \subset \alpha_0 \cap \beta_0$. Maar $\alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$, dus is $a_0 \subset s_0$. Zowel a_0 als s_0 hebben dimensie 1. Volgens de vectorruimte theorie zal dus $a_0 = s_0$ en daaruit volgt dat $a \parallel s$. □

-

Stelling 7.2. *Is één van twee evenwijdige rechten a en b omvat in een vlak α, dan is de andere rechte evenwijdig met dit vlak.*

Bewijs. $a \parallel b \Rightarrow a_0 = b_0$ en $a \subset \alpha \Rightarrow a_0 \subset \alpha_0$. Dan is ook $b_0 \subset \alpha_0$ en is $b \parallel \alpha$. □

-

Stelling 7.3. *Als twee snijdende vlakken α en β elk één van twee evenwijdige rechten a en b omvatten, dan is hun snijlijn s evenwijdig met die rechten.*

Bewijs. Uit het gegeven volgt dat $\alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$, $a_0 \subset \alpha_0$ en $b_0 \subset \beta_0$. Omdat $a \parallel b$ is $a_0 = b_0$ en zal dus ook $a_0 \subset \beta_0$. Omdat a_0 ook in α_0 ligt, volgt hieruit dat $a_0 \subset \alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$. Omdat a_0 en s_0 beiden dimensie 1 hebben, weten we dat $a_0 = s_0$ en dus is $a \parallel s$. □

-

Stelling 7.4. *Als een vlak α twee onderling evenwijdige vlakken β en γ snijdt, dan zijn de snijlijnen a en b evenwijdig.*

Bewijs. Omdat $\beta \parallel \gamma$ is $\beta_0 = \gamma_0$. Verder is $\alpha_0 \cap \beta_0 = a_0$ en $\alpha_0 \cap \gamma_0 = b_0$. Hieruit volgt dat $a_0 = b_0$ en dus is $a \parallel b$. □

-

Stelling 7.5. *Is een rechte a evenwijdig met twee onderling snijdende vlakken α en β, dan is hij evenwijdig met hun snijlijn s.*

Bewijs. Omdat $a \parallel \alpha$ en $a \parallel \beta$ is $a_0 \subset \alpha_0$ en $a_0 \subset \beta_0$ en dus ook $a_0 \subset \alpha_0 \cap \beta_0 = s_0$. Bijgevolg is $a_0 \subset s_0$. Omdat ze beiden dimensie 1 hebben, volgt hieruit dat $a_0 = s_0$ en $a \parallel s$. □

-

Stelling 7.6. *Is b niet evenwijdig met a, dan stelt $a + b_0$ het vlak voor dat a omvat en evenwijdig is met b.*

Bewijs. Stel dat α het gevraagde vlak is en stel $p \in a$, dan is $a = p + a_0$. Omdat a in α ligt, zal $a_0 \subset \alpha_0$. Omdat $b \parallel \alpha$, zal $b_0 \subset \alpha_0$. Uit deze twee feiten volgt dat $a_0 + b_0 \subset \alpha_0$. Omdat a en b niet evenwijdig zijn is $\dim{(a_0 + b_0)} = 1 + 1 - 0 = 2$. Bijgevolg is $a_0 + b_0 = \alpha_0$. Maar dan is $a + b_0 = p + a_0 + b_0 = p + \alpha_0 = \alpha$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$