Hoofdstuk 9

Eenheden van $\mathbb{Z}C_8$

9.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}C_8$

Stel $C_8 = \{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6, g^7\}$ de cyclische groep van orde 8. Definieer vervolgens $\mathbb{Q}C_8 = \{\sum_{i=0}^{i=7} a_i g^i : a_i \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}C_8, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

C_8 is een abelse groep met acht toevoegingsklassen en dus acht irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : C_8 \to \mathbb{Q} : g \mapsto 1\\
&\rho_2 : C_8 \to \mathbb{Q}(\epsilon_8) : g \mapsto \epsilon_8\\
&\rho_3 : C_8 \to \mathbb{Q}(i) : g \mapsto \epsilon_8^2 = i\\
&\rho_4 : C_8 \to \mathbb{Q}(\epsilon_8) : g \mapsto \epsilon_8^3\\
&\rho_5 : C_8 \to \mathbb{Q} : g \mapsto \epsilon_8^4 = -1\\
&\rho_6 : C_8 \to \mathbb{Q}(\epsilon_8) : g \mapsto \epsilon_8^5 = -\epsilon_8\\
&\rho_7 : C_8 \to \mathbb{Q}(i) : g \mapsto \epsilon_8^6 = -i\\
&\rho_8 : C_8 \to \mathbb{Q}(\epsilon_8) : g \mapsto \epsilon_8^7 = -\epsilon_8^3
\end{aligned}$$

Hierbij is $\epsilon_8^8 = 1$ of $\epsilon_8^7 = -1 - \epsilon_8 - \epsilon_8^2 - \epsilon_8^3 - \epsilon_8^4 - \epsilon_8^5 - \epsilon_8^6$.
Bovendien is $\mathbb{Q}(\epsilon_8) = \sum_{i=0}^{i=6} a_i \epsilon_8^i : a_i \in \mathbb{Q}\}$
We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}C_8$. Noteer $x = \sum_{i=0}^{i=7} a_i g^i$, dan is:
$\rho_1(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$
$\rho_5(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7$
$\rho_3(x) = (a_0 - a_2 + a_4 - a_6) + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7)i$
$\rho_7(x) = (a_0 - a_2 + a_4 - a_6) + (a_3 - a_1 + a_7 - a_5)i$
$\rho_2(x) = (a_0 - a_4) + (a_1 - a_5)\epsilon_8 + (a_2 - a_6)\epsilon_8^2 + (a_3 - a_7)\epsilon_8^3$

$\rho_4(x) = (a_0 - a_4) + (a_3 - a_7)\epsilon_8 + (a_6 - a_2)\epsilon_8^2 + (a_1 - a_5)\epsilon_8^3$
$\rho_6(x) = (a_0 - a_4) + (a_5 - a_1)\epsilon_8 + (a_2 - a_6)\epsilon_8^2 + (a_7 - a_3)\epsilon_8^3$
$\rho_8(x) = (a_0 - a_4) + (a_7 - a_3)\epsilon_8 + (a_6 - a_2)\epsilon_8^2 + (a_5 - a_1)\epsilon_8^3$

We definiëren tenslotte: $\rho = (\rho_1, \rho_5, \rho_3, \rho_2)$ via

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

Hierbij is de eerste component $\rho_1(x)$, de tweede component is $\rho_5(x)$, de derde en vierde component zijn het reëel en imaginair deel van $\rho_3(x)$ en de andere componenten zijn de coëfficiënten van ϵ_8^i met $i : 0, 1, \cdots, 3$ in $\rho_2(x)$. Het is duidelijk dat:

Stelling 9.1. $\mathbb{Q}C_8 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_8)$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

9.2 De groepsring $\mathbb{Z}C_8$

$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)\oplus\mathbb{Z}(\epsilon_8)$ is de ring der gehelen van $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}(i)\oplus\mathbb{Q}(\epsilon_8)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}C_8$ noteren we met H. Uiteraard is $\mathbb{Z}C_8$ een deel van H omdat elk element van $\mathbb{Z}C_8$ afgebeeld wordt op een element van $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)\oplus\mathbb{Z}(\epsilon_8)$. Dus $\mathbb{Z}C_8 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}C_8$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{8}(1 + g + g^2 + g^3 + g^4 + g^5 + g^6 + g^7)$ een geheel van $\mathbb{Q}C_8$ omdat $x^2 - x = 0$ en toch is x geen element van $\mathbb{Z}C_8$. Bijgevolg komt $\mathbb{Z}C_8$ slechts overeen met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_8)$.

Stelling 9.2. $\mathbb{Z}C_8 \cong \{(x_0, x_1, x_2 + x_3 i, x_4 + x_5\epsilon_8 + x_6\epsilon_8^2 + x_7\epsilon_8^3) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_8) :$
$x_0 \equiv x_2 + x_3 + 2x_6 + 2x_7 \ mod\ 4$ *en* $x_1 \equiv x_2 - x_3 + 2x_6 + 2x_7 \ mod\ 4\}$

Bewijs. Stel $\rho(\mathbb{Z}C_8) = A$. Nu is: $(x_0, x_1, x_2 + x_3 i, x_4 + x_5\epsilon_8 + x_6\epsilon_8^2 + x_7\epsilon_8^3) \in A$

$$\iff \exists a, \cdots, h \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, \cdots, h \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -8 & 8 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -8 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & -4 & 2 & 8 & -8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_0 - 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 4x_6 + 4x_7 \equiv 0 \bmod 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 4x_6 - 4x_7 \equiv 0 \bmod 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 \equiv x_2 + x_3 + 2x_6 + 2x_7 \bmod 4 \\ x_1 \equiv x_2 - x_3 + 2x_6 + 2x_7 \bmod 4 \end{cases}$$

□

9.3 Eenheden in $\mathbb{Z}C_8$

De eenheden in $\mathbb{Z}(\epsilon_8)$ zijn niet allemaal triviaal. Er zijn $\frac{\phi(8)}{2} - 1 = 1$ fundamentele eenheden. Deze zijn van de vorm $\dfrac{\epsilon_8^a - 1}{\epsilon_8 - 1}$ met $1 < a < \frac{8}{2}$ en a en 8 onderling ondeelbaar. Dus moet $a = 3$, en krijg je als fundamentele eenheid $\epsilon_8^2 + \epsilon_8 + 1$. Bijgevolg is $U(\mathbb{Z}(\epsilon_8)) = \{\pm\epsilon_8^n(1 + \epsilon_8 + \epsilon_8^2)^p\}$.

Stelling 9.3. $U(\mathbb{Z}C_8) = \pm C_8 . \langle g^6 + 2g^5 + g^4 - g^2 - g - 1\rangle$

Bewijs. We bepalen eerst de eenheden in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_8)$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(i)\oplus\mathbb{Z}(\epsilon_8)) = U(\mathbb{Z})\oplus U(\mathbb{Z})\oplus U(\mathbb{Z}(i))\oplus U(\mathbb{Z}(\epsilon_8))$. Dus $\alpha \in U(\mathbb{Z}C_8)$ als $\rho_1(\alpha) = \pm 1$, $\rho_5(\alpha) = \pm 1$, $\rho_3(\alpha) = \pm 1$ of $\pm i$ en $\rho_2(\alpha) = \pm\epsilon_8^n(1 + \epsilon_8 + \epsilon_8^2)^p$.

Maar ρ_2 is niet injectief, want $\rho_2(a+bg+cg^2+dg^3+eg^4+fg^5+hg^6+ig^7) = 0 \iff (a_0 - a_4) + (a_1 - a_5)\epsilon_8 + (a_2 - a_6)\epsilon_8^2 + (a_3 - a_7)\epsilon_8^3 = 0 \iff a_0 = a_4, a_1 = a_5, a_2 = a_6$ en $a_3 = a_7,$. Uit $\rho_2(\alpha) = \pm\epsilon_8^n(1 + \epsilon_8 + \epsilon_8^2)^p$ volgt dan dat $\alpha = \pm g^n(1 + g + g^2)^p + (k_0 + k_1 g + k_2 g^2 + k_3 g^3)(1 + g^4)$. Volgens S.K.Sehgal is $U(\mathbb{Z}C_8) = C_8 \times F$ waarbij F een vrije abelse groep is van rang $\frac{1}{2}(8 + 1 + 1 - 8) = 1$. Als we dus 1 onafhankelijke eenheid hebben in $U(\mathbb{Z}C_8)$ dan kennen we gans $U(\mathbb{Z}C_8)$. We vinden een oplossing voor $\rho_1(\alpha) = \pm 1, \rho_5(\alpha) = \pm 1$ en $\rho_3(\alpha) = \pm 1$ of $\pm\, i$ voor $p = 2, k_0 = k_1 = k_3 = -1$ en $k_2 = -2$. In dat geval is $\alpha = (1 + g + g^2)^2 - (1 + g + 2g^2 + g^3)(1 + g^4) = -g(g^6 + 2g^5 + g^4 - g^2 - g - 1)$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$