Ruimtemeetkunde deel 2

Door op de verzameling $\mathbb{R}^3$ een vectorruimte structuur aan te brengen zijn we in staat aan ruimtemeetkunde te doen. We kunnen rechten, vlakken en hun onderlinge ligging bestuderen. Begrippen zoals het midden, snijpunt, evenwijdigheid e.d. worden op een natuurlijke wijze naar voren gebracht. We kunnen echter niet spreken van loodrechte stand, afstanden, bollen ,$\cdots$. Daarvoor moeten we een extra structuur leggen op $\mathbb{R}^3$.

1 Het skalair product

Een skalair product in een gegeven vectorruimte is een bewerking die met twee vectoren een reëel getal laat overeenkomen, genoteerd door $\langle x, y\rangle$. Deze bewerking moet commutatief zijn, bilineair (een andere naam voor distributiviteit) en positief (het skalair produkt van een vector met zich zelf is steeds positief en kan enkel nul zijn als de vector de nulvector is). We definieren het skalair product als volgt:

$$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Stelling 1.1. *Het skalair product is positief.*

Bewijs. Noteer $x = (a, b, c)$, dan is $\langle x, x\rangle = a^2+b^2+c^2$ en dat is zeker positief. Het kan enkel nul zijn als $a = b = c = 0$. $\square$

Stelling 1.2. *Het skalair product is commutatief.*

Bewijs. Neem $x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2)$, dan is $\langle x, y\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1 = \langle y, x\rangle$. Dus het skalair product is commutatief. $\square$

Stelling 1.3. *Het skalair produkt is bilineair.*

Bewijs. Neem $x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2), z = (x_3, y_3, z_3)$ en $r, s \in \mathbb{R}$. Dan is $\langle x, ry + sz\rangle = x_1(ry_1 + sz_1) + x_2(ry_2 + sz_2) + x_3(ry_3 + sz_3) = r(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + s(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) = r. \langle x, y\rangle + s. \langle x, z\rangle$. $\square$

Een vectorruimte, uitgerust met een skalair product, noemen we een *Euclidische (vector) ruimte.*

2 Orthogonaliteit

- Twee punten (of vectoren) zijn *orthogonaal* als en slechts als hun skalair product gelijk is aan nul, m.a.w.

  $$x \text{ ortho } y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle$$

  Zo is $(3, 2, -4)$ ortho $(2, 7, 5)$ want $3.2 + 2.7 + (-4)5 = 6 + 14 - 20 = 0$.

- Het *orthoplement* van een verzameling A is de verzameling van alle punten die orthogonaal zijn met alle punten van A. Of

  $$A^{\perp} = \{x : \forall a \in A : \langle x, a \rangle = 0\}$$

  We definieren ook $\emptyset^{\perp} = E_0$.

  Stelling 2.1. *Het orthoplement van een verzameling is een vectorruimte.*

  Bewijs. Gegeven de verzameling A. We willen aantonen dat $A^{\perp}$ een deelruimte is van E_0, dus dat elke lineaire combinatie van twee elementen van $A^{\perp}$ terug in $A^{\perp}$ zit. Stel $x, y \in A^{\perp}$ en $r, s \in \mathbb{R}$ en neem een willekeurig element a van A. Dan is $\langle rx + sy, a \rangle = r. \langle x, a \rangle + s. \langle y, a \rangle = r.0 + s.0 = 0$. Bijgevolg is $rx + sy \in A^{\perp}$. Als A leeg is dan volgt het gestelde uit de definitie. $\square$

  Stelling 2.2. *Als $A \subset B$ dan is $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.*

  Bewijs. Neem $x \in B^{\perp}$. We proberen aan te tonen dat x ook in $A^{\perp}$ zit, dus dat x ortho is met elk element van A. Neem $a \in A$. Maar $A \subset B$, dus $a \in B$ en dus is $\langle x, a \rangle = 0$. Bijgevolg is $x \in A^{\perp}$. $\square$

  Stelling 2.3. *Als G een voortbrengend deel is van A, dan is $A^{\perp} = G^{\perp}$.*

  Bewijs. Vermits G een deel is van A weten we uit vorige stelling al dat $A^{\perp} \subset G^{\perp}$. Rest nog te bewijzen dat ook $G^{\perp} \subset A^{\perp}$, dus dat elk element van $G^{\perp}$ ook een element is van $A^{\perp}$. Neem $x \in G^{\perp}$ en a een willekeurig element van A. Omdat G een voortbrengend deel is van A geldt $a = r_1 g_1 + r_2 g_2 + \cdots r_n g_n$. Hierbij zijn g_i de elementen van G. Bereken nu het skalair product van x met a: $\langle x, a \rangle = r_1. \langle x, g_1 \rangle + \cdots + r_n. \langle x, g_n \rangle = r_1.0 + \cdots + r_n.0 = 0$. Bijgevolg is x ortho met een willekeurig element van A en behoort het dus tot $A^{\perp}$. $\square$

De belangrijkste verzamelingen in E_0 zijn de deelruimten. Als we het orthoplement van een deelruimte willen berekenen, volstaat het dus, volgens de vorige stelling, dat we het orthoplement berekenen van een voortbrengend deel van de deelruimte. In E_0 hebben we 0,1,2 of 3 dimensionale deelruimten. Wat zijn hun orthoplementen?

– A is een nul dimensionale deelruimte. $A = \{o\}$. Het voortbrengend deel is de lege verzameling en daarvan is, per definitie, het orthoplement gelijk aan E_0. Dus $\{o\}^\perp = E_0$.

– A is een drie dimensionale deelruimte en dus is $A = E_0$. Neem als voortbrengend deel $G = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Dan is $x(a,b,c) \in E_0^\perp = G^\perp$ als $a = b = c = 0$. Bijgevolg is $E_0^\perp = \{o\}$.

– A is een één dimensionale deelruimte, dus $A = \mathbb{R}a$ en $A^\perp = \{a\}^\perp$. Als $a = (a,b,c)$, dan is $x(x,y,z) \in A^\perp$ als $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = 0$ of dus als $ax+by+cz = 0$. Dit is de vergelijking van een vectorvlak. Het orthoplement van een vectorrechte is dus een vectorvlak. Veronderstel dat a' en a'' de voortbrengende elementen zijn van dat vlak.

– A is een twee dimensionale deelruimte, dus $A = \mathbb{R}a' + \mathbb{R}a''$. Dan is $x \in A^\perp$ als $a'x + b'y + c'z = 0$ en $a''x + b''y + c''z = 0$. Omdat (a',b',c') en (a'',b'',c'') niet evenredig zijn stelt dit, als snijlijn van twee vectorvlakken, een vectorrechte voor. Bovendien bevat deze rechte a uit vorig punt, want a is ortho met a' en a". Het orthoplement van een vectorvlak is dus een vectorrechte.

Uit vorige redeneringen kunnen we ook afleiden dat voor een willekeurige deelruimte A geldt dat

$$\left(A^\perp\right)^\perp = A$$

Deze eigenschap geldt niet als A een gewone deelverzameling is van E_0.

- Enkele oefeningen: Bepaal

  1. $\mathbb{R}(2,3,5)^\perp$
  2. $\big(\mathbb{R}(0,1,3) + \mathbb{R}(2,4,7)\big)^\perp$
  3. $\{(1,3,2),(2,3,1),3,4,1)\}^\perp$.

3 Loodrechte stand van rechten en vlakken

- Het loodrecht zijn van rechten en vlakken heeft uiteraard alleen iets te maken met de overeenkomstige vectorrechten en vectorvlakken. Vandaar volgende definities:

$$a \perp b \Leftrightarrow b_0 \subset a_0^\perp \Leftrightarrow a_0 \subset b_0^\perp \Leftrightarrow b \perp a$$

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta_0^\perp \subset \alpha_0 \Leftrightarrow \alpha_0^\perp \subset \beta_0 \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$$

$$a \perp \alpha \Leftrightarrow a_0 = \alpha_0^\perp \Leftrightarrow \alpha_0 = a_0^\perp \Leftrightarrow \alpha \perp a$$

- Het loodrecht zijn hangt dus af van de definitie van het skalair product.
- Een richtingsvector loodrecht op een vlak noemen we de *normaalvector*.
- In de cartesiaanse vergelijking van een vlak α vormen de coëfficiënten van x,y en z een normaalvector van α. Stel immers $\alpha \longleftrightarrow ax+by+cz+d=0$, dan is $\alpha_0 \longleftrightarrow ax+by+cz=0$. Met andere woorden, voor elke $(x,y,z) \in \alpha$ geldt $\langle (a,b,c),(x,y,z) \rangle = 0$. Bijgevolg is $\alpha_0^\perp = \mathbb{R}(a,b,c)$ en dan is (a,b,c) dus een normaalvector van α.
- De loodlijn l door (x_1,y_1,z_1) op $ax+by+cz+d=0$ is $l = (x_1,y_1,z_1) + \mathbb{R}(a,b,c)$.
- Het loodvlak λ door (x_1,y_1,z_1) op de rechte $(x_2,y_2,z_2)+\mathbb{R}(a,b,c)$ is $\lambda \longleftrightarrow ax+by+cz+d=0$, waarbij d bepaald wordt door de coördinaten (x_1,y_1,z_1) in te vullen.
- Het loodvlak λ op $ax+by+cz+d=0$ door de rechte $(x_1,y_1,z_1)+\mathbb{R}(u,v,w)$ is $\lambda = (x_1,y_1,z_1)+\mathbb{R}(u,v,w)+\mathbb{R}(a,b,c)$
- We geven nu een paar stellingen over loodrechte stand van rechten en vlakken:

  Stelling 3.1. *Als één van twee evenwijdige rechten a en b loodrecht staat op een vlak α, dan staat de andere er ook loodrecht op.*

  Bewijs. Omdat $a \parallel b$ is $a_0 = b_0$. Maar $a \perp \alpha$, dus $a_0 = \alpha_0^\perp$. Maar dan is ook $b_0 = \alpha_0^\perp$ en $b \perp \alpha$. □

Stelling 3.2. *Een rechte a en een vlak α, beiden loodrecht op een vlak β, zijn evenwijdig.*

Bewijs. $a \perp \beta$, dus $a_0 = \beta_0^\perp$. En $\alpha \perp \beta$, dus $\beta_0^\perp \subset \alpha_0$. Hieruit volgt dat $a_0 \subset \alpha_0$ en $a \parallel \alpha$. □

Stelling 3.3. *Staan twee vlakken α en β loodrecht op elkaar, dan is elke rechte l door een punt van het ene loodrecht op het andere, omvat in het ene.*

Bewijs. Omdat $\alpha \perp \beta$ is $\beta_0^\perp \subset \alpha_0$. Neem $A = (x_1, y_1, z_1) \in \alpha$, dan is de rechte door A loodrecht op β gegeven door $l = (x_1, y_1, z_1) + \beta_0^\perp$. Juist omdat $\beta_0^\perp \subset \alpha_0$ ligt l in α, wat moest worden bewezen. □

Stelling 3.4. *Als een rechte a evenwijdig is met een vlak α en een rechte b loodrecht staat op dat vlak, dan staat a ook loodrecht op b.*

Bewijs. Uit $a \parallel \alpha$ volgt dat $a_0 \subset \alpha_0$. Omdat $b \perp \alpha$ is $\alpha_0 = b_0^\perp$. Bijgevolg is $a_0 \subset b_0^\perp$ en $a \perp b$. □

Stelling 3.5. *Een rechte a, loodrecht op een vlak α, is loodrecht op elke rechte b omvat in dat vlak.*

Bewijs. Uit $a \perp \alpha$ volgt dat $a_0^\perp = \alpha_0$. Omdat $b \subset \alpha$ is $b_0 \subset \alpha_0$. Bijgevolg is $b_0 \subset a_0^\perp$ en $a \perp b$. □

Stelling 3.6. *Een rechte p staat loodrecht op een vlak α als hij loodrecht staat op twee snijdende rechten a en b van dat vlak.*

Bewijs. Omdat p loodrecht staat op a en b is $a_0 \subset p_0^\perp$ en $b_0 \subset p_0^\perp$. Dan is $a_0 + b_0 \subset p_0^\perp$. Omdat a en b elkaar snijden is $a_0 + b_0$ een tweedimensionale deelruimte en dus is $a_0 + b_0 = p_0^\perp$. Maar a en b liggen ook in α, dus $a_0 \subset \alpha_0$ en $b_0 \subset \alpha_0$. Met dezelfde redenering dan hierboven is dus $a_0 + b_0 = \alpha_0$. Bijgevolg is $p_0^\perp = \alpha_0$ en dus is p loodrecht op α. □

Stelling 3.7. *Twee vlakken α en β staan loodrecht als het ene vlak een rechte a bevat die loodrecht staat op het andere vlak.*

Bewijs. De rechte a ligt in α en staat loodrecht op β. Dus $a_0 \subset \alpha_0$ en $a_0 = \beta_0^\perp$. Maar dan is $\beta_0^\perp \subset \alpha_0$ en dus is $\alpha \perp \beta$. □

Stelling 3.8. *Laat men uit een punt A buiten een vlak α de loodlijn p neer op dat vlak, en uit het voetpunt V de loodlijn m op een rechte a van het vlak (noem het nieuwe voetpunt W), dan is AW loodrecht op a.(de stelling van de drie loodlijnen)*

Bewijs. Omdat p loodrecht staat op α staat p loodrecht op elke rechte van het vlak, en dus ook op a. Dan staat a loodrecht op p maar ook op m en dus ook op het vlak β bepaald door de twee snijdende rechten a en m. Nu ligt AW in dat vlak β. Bijgevolg staat a loodrecht op AW. □

- Het *middelloodvlak* van een koppel punten A en B is het vlak in het midden van (A, B), loodrecht op AB.
- Enkele oefeningen:
  1. Bewijs: elke loodlijn door een punt op een gegeven rechte is omvat in het loodvlak door dit punt op die rechte.
  2. Bepaal de rechte door $a(1, 2, 3)$ die $b = (7, 0, 6) + \mathbb{R}(3, -1, 5)$ loodrecht snijdt.
  3. Men projecteert de 8 hoekpunten van een kubus loodrecht op een lichaamsdiagonaal. Bepaal de ligging van de beeldpunten.
  4. Onderzoek of een rechte hoek na loodrechte projectie op een vlak een rechte hoek blijft.

4 Afstanden

Vertrekkend van het skalair product kan men ook afstanden definieren. Daarvoor hebben we het begrip *norm* nodig.

$$\forall x = (x_1, y_1, z_1) \in E_0 : \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$$\|(x_1, y_1, z_1)\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Omdat het skalair product positief is, is het begrip norm goed gedefinieerd.

Een aantal eenvoudige eigenschappen:

1. $\|x\| \geq 0$ en $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|rx\| = |r|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4.1 Afstand tussen twee punten

- We definiëren nu de afstand tussen twee punten x en y als volgt:

$$\forall x, y \in E_0 : d(x, y) = \|y - x\|$$

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

- Enkele eigenschappen:
  1. $d(x, y) \geq 0$ en $d(x, y) = 0$ als $x = y$.
  2. $d(x, y) = d(y, x)$.
  3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Dit noemen we de driehoeksongelijkheid.

- Bestuderen we nu de verzameling punten in E_0 die even ver van één, twee of drie of vier punten gelegen zijn. Een *sfeer* is de verzameling van punten die op een afstand R liggen van een gegeven punt M. Als $M(a, b, c)$ het middelpunt is van de sfeer en R de straal, dan is de vergelijking van de sfeer

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Stelling 4.1. *De verzameling punten die evenver liggen van twee verschillende punten A en B is het middelloodvlak van (A, B).*

Bewijs. Veronderstel $a(x_1, y_1, z_1)$ en $b(x_2, y_2, z_2)$. Een willekeurig punt (x, y, z) ligt evenver van A als van B als $d(x, a) = d(x, b)$. Dan moet $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$ of na uitrekenen: $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2$. Omdat de coëfficiënten van x,y en z nooit samen nul kunnen zijn, is dit de vergelijking van een vlak met normaalvector $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Dit is de richtingsvector van de rechte door a en b. Dus het vlak staat loodrecht op de rechte door a en b. Rest nog te bewijzen dat het midden $m(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$ van (a, b) in dat vlak ligt. Invullen in de vergelijking geeft het gewenste resultaat. $\square$

Stelling 4.2. *De verzameling punten die even ver liggen van drie niet-collineaire punten A,B en C is de loodlijn op het vlak bepaald door A,B en c, door het middelpunt van de cirkel, omgeschreven aan driehoek ABC.*

Bewijs. Een willekeurig punt X ligt even ver van A als B als het in het middelloodvlak λ van (A, B) gelegen is. Als X ook even ver moet liggen van A als van C, dan moet X in het middelloodvlak μ van (A, C) liggen. Dus $X \in \lambda \cap \mu$. Nu kunnen λ en μ niet evenwijdig zijn, want anders zouden $\lambda_0 = \mu_0$ en omdat $\lambda_0 = (AB)_0^{\perp}$ en $\mu_0 = (AC)_0^{\perp}$ zou dan $(AB)_0 = (AC)_0$. Dit kan onmogelijk omdat A,B en C collineair zijn. Bijgevolg is $\lambda \cap \mu = p$. Deze rechte p staat loodrecht op AB en AC, dus op het vlak ABC. Veronderstel nu dat p het vlak door A,B en C snijdt in P. Dan ligt P uiteraard evenver van A,B en C en is het het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. □

De rechte p noemen we de middelpuntsloodlijn van driehoek ABC.

Stelling 4.3. *Er is maar één punt M dat even ver ligt van vier niet-coplanaire punten A,B,C en D.*

Bewijs. M moet op de middelpuntsloodlijn p van driehoek ABC liggen en in het middelloodvlak λ van (A, D). Als p evenwijdig zou zijn met λ, zou $p_0 \subset \lambda_0$ en dus ook $\lambda_0^{\perp} \subset p_0^{\perp}$. Maar dan zou $(AD)_0 \subset (ABC)_0$ en dan zouden A,B,C en D in een zelfde vlak liggen. Er is dus maar één punt dat even ver ligt van A,B,C en D, namelijk het snijpunt van p en λ. □

Door 4 niet-coplanaire punten gaat dus juist één sfeer.

4.2 Afstand van een punt tot een vlak

- De afstand van een punt A tot een vlak α is per definitie de afstand van A tot het snijpunt S van de loodlijn l uit A op α.

- Veronderstel dat $A(x_1, y_1, z_1)$ en $\alpha \longleftrightarrow ax + by + cz + d = 0$. Het snijpunt S ligt op de loodlijn l en heeft dus coördinaten $(x_1 + k.a, y_1 + k.b, z_1 + k.c)$ en ligt ook in α dus moet $a(x_1 + ka) + b(y_1 + kb) + c(z_1 + kc) + d = 0$. Hieruit volgt dat $k = -\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. We moeten nu nog de afstand berekenen tussen A en S.

Deze is gelijk aan $\sqrt{(x_S - x_1)^2 + (y_S - y_1)^2 + (z_S - z_1)^2} = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2} = |r|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Hieruit vinden we tenslotte volgende formule:

$$d(A, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- De afstand van A tot elk ander punt van α is groter dan $d(A, \alpha)$. Dit volgt uit de stelling van Pythagoras.
- Een sfeer en een vlak zijn disjunct, rakend of snijdend alnaargelang de straal van de sfeer kleiner is dan , gelijk is aan of groter is dan de afstand van het middelpunt van de sfeer tot het vlak.

4.3 Afstand van een punt tot een rechte

- De afstand van een punt A tot de rechte l is per definitie de afstand van A tot het snijpunt S van het loodvlak door A op l, met l.
- Dit is de kleinst mogelijke afstand tussen A en een punt van l, met andere woorden de afstand van A tot een willekeurig punt van l is steeds groter dan de hier boven gedefinieerde afstand.
- Een sfeer en een rechte zijn disjunct, rakend of snijdend alnaargelang de straal van de sfeer kleiner is dan , gelijk is aan of groter is dan de afstand van het middelpunt van de sfeer tot de rechte.

4.4 Afstand tussen twee kruisende rechten

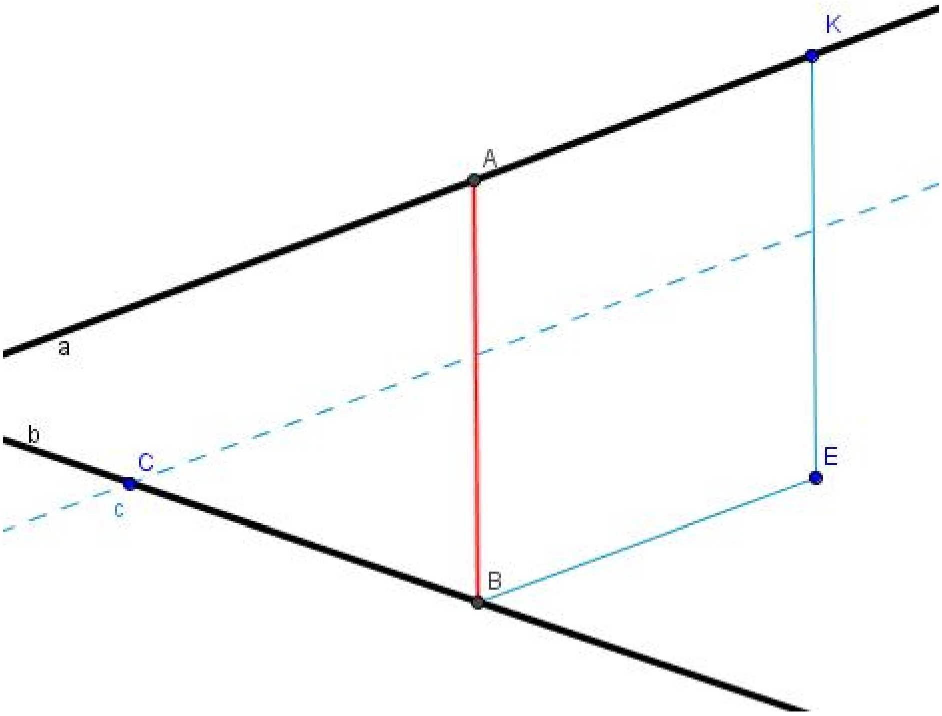
- De afstand tussen twee kruisende rechten a en b is per definitie de afstand tussen de twee snijpunten A en B van a en b met de rechte die a en b loodrecht snijdt. Deze loodlijn noemt met *de gemeenschappelijke loodlijn* van a en b.
- Als we de gemeenschappelijke loodlijn noteren door p, dan is $p \perp a$ en $p \perp b$, dus $a_0 \subset p_0^\perp$ en $b_0 \subset p_0^\perp$. Omdat de somruimte $a_0 + b_0$ de kleinst mogelijke deelruimte van E_0 is die zowel a_0 als b_0 omvat, moet $a_0 + b_0 \subset p_0^\perp$. Omdat beide deelruimten dimensie 2 hebben moeten ze gelijk zijn en dus is $a_0 + b_0 = p_0^\perp$. Hieruit volgt $p_0 = (a_0 + b_0)^\perp$. Om p te bepalen nemen we de doorsnede van het vlak door a, evenwijdig met p_0 en het vlak door b, evenwijdig met p_0. Dus $p = (a + p_0) \cap (b + p_0)$.

- Het is echter sneller te werken met de methode van het lopende punt: neem een willekeurig punt A op a en een willekeurig punt B op b en druk uit dat de rechte AB loodrecht staat op a en b.

- Om de afstand tussen twee kruisende rechten a en b te bepalen moeten we zelfs die gemeenschappelijke loodlijn niet bepalen. Bepaal de afstand van een willekeurig punt A van a tot het vlak door b, evenwijdig met a.

- Als $X \in a$ en $Y \in b$, dan is de afstand tussen X en Y steeds groter dat de afstand tussen a en b.

- Constructie van de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten a en b:



1. Construeer door een willekeurig punt C van b een rechte c evenwijdig met a.
2. Construeer de loodlijn door een willekeurig punt K op het vlak bepaald door b en c. Het voetpunt van die loodlijn is E.
3. Construeer door E een rechte evenwijdig aan c (en a), die b snijdt in B.

4. Construeer in B een rechte evenwijdig aan KE, die a snijdt in A. Dit punt A bestaat want de geconstrueerde rechte ligt volledig in het vlak bepaald door a en KE.
5. AB is de gemeenschappelijke loodlijn van a en b. Want $AB \parallel KE$ en dus staat AB loodrecht op het vlak bepaald door b en c. Maar dan staat AB loodrecht op elke rechte van het vlak, dus op b en op c. Maar c loopt evenwijdig met a, dus staat AB ook loodrecht op a.

4.5 Enkele oefeningen

- Vind het punt op de rechte $l = (0, 9, 7) + \mathbb{R}(1, 1, 2)$ dat even ver ligt van $A(1, 2, 3)$ als van $B(5, 6, 7)$.
- Vind de middelpuntsloodlijn van driehoek ABC met $A(3, 0, 0)$, $B(1, 3, 0)$ en $C(0, 0, 4)$.
- Vind het middelpunt en de straal van de sfeer door $A(3, 5, 0)$, $B(3, 1, 0)$, $C(2, 0, 2)$ en $D(0, 1, 3)$.
- Welke punten op de rechte door $A(2, 1, 0)$ en $B(-2, 3, 8)$ hebben afstand 3 tot $C(1, 0, 2)$.
- Vind alle punten die afstand 5 hebben tot het vlak $\alpha \longleftrightarrow 2x + 2y + z - 4 = 0$.
- Bepaal de gemeenschappelijke loodlijn van $a = (1, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 1, 2)$ en $b = (0, 3, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$.
- Vind de straal van de doorsnede van $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ met $2x + 3y - 6z - 17 = 0$.
- Vind de vergelijking van de sferen met middelpunt $M(-4, 3, 5)$ die raken aan $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 11 = 0$.
- In twee aaneengrenzende zijvlakken van de eenheidskubus tekent men kruisende diagonalen. Bepaal de gemeenschappelijke loodlijn van deze diagonalen en de afstand ertussen.
- Bewijs : In een regelmatige tetraëder is de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende ribben de rechte die hun middens verbindt.
- Een tetraëder heeft 5 ribben met lengte A en één ribbe met lengte B. Bepaal de kortste afstand tussen de kruisende ribben met lengte A en B.

5 Hoeken

- De hoek tussen twee rechten a en b is per definitie gelijk aan

$$\angle a, b = \mathrm{Bgcos}\frac{|u.v|}{\|u\|.\|v\|}$$

waarbij u en v de richtingvectoren zijn van a en b.

- De hoek tussen een rechte a en een vlak α is per definitie het complement van de hoek bepaald door de rechte en de normaal van het vlak. Notatie: $\angle a, \alpha$.

-

Stelling 5.1. *De hoek tussen een rechte a en een vlak α is de hoek tussen de rechte en zijn loodrechte projectie op dat vlak.*

Bewijs. Noteer met S het snijpunt van a met α. Uit een ander punt A van a construeert men de loodlijn p op het vlak α. Het voetpunt van die loodlijn is V. De rechte SV is de loodrechte projectie van a in het vlak α. De driehoek AVS is rechthoekig. De hoek in A is de hoek tussen de normaal van α en de rechte a. Dus is $\angle a, \alpha = 90° - \widehat{A} = \widehat{S} = \angle a, SV$. □

- De hoek tussen twee vlakken α en β is per definitie de hoek gevormd door de normalen van die twee vlakken. Notatie: $\angle\alpha, \beta$.

-

Stelling 5.2. *De hoek tussen twee vlakken α en β is de hoek tussen de snijlijnen l en m van α en β met het loodvlak γ op de snijlijn s van α en β.*

Bewijs. Zij P een punt dat niet in α of β ligt en noteer het loodvlak door P op s door γ. De snijlijnen van α en β met γ zijn respectievelijk l en m. Construeer de loodlijn uit P op l met voetpunt A en de loodlijn uit P om m met voetpunt B. Omdat PA en PB in γ liggen, staat s loodrecht op PA en PB. Bijgevolg staat PA loodrecht op α, want het staat loodrecht op twee snijdende rechten van α. Analoog staat PB loodrecht op β. PA en PB zijn dus normalen van α en β. In de vierhoek PASB, waarbij S het snijpunt is van s met γ, zijn de hoeken in S en P supplementair.Hieruit volgt het gestelde. □

- Enkele opgaven:

  1. Door het hoekpunt van een balk met afmetingen 1,2 en 3 tekent men de diagonalen van de zijvlakken. Bereken de hoeken tussen die diagonalen.
  2. Door $A(1,0,0)$ en $B(0,2,0)$ construeert men een vlak dat een hoek van 30° maakt met de z-as. Waar snijdt dat vlak de z-as?
  3. Bepaal de hoek tussen twee aaneengrenzende zijvlakken van een regelmatig octaëder (regelmatig achtvlak).