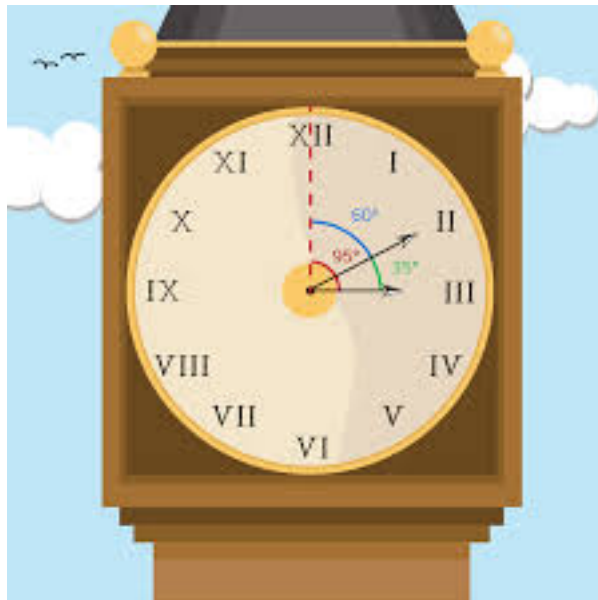


De wijzers van een uurwerk

Problemen

De bewegingen van de wijzers van een uurwerk hebben ons steeds geboeid. Staan de wijzers van een uurwerk boven elkaar om kwart na 3? Hoeveel keer staan ze loodrecht op elkaar in een etmaal? Dit zijn zeker vragen die je al eens bent tegengekomen. In dit artikel gaan we eerst de hoek berekenen tussen de twee wijzers van het uurwerk en dan kunnen we al deze vragen oplossen.

Hoek tussen de wijzers



We berekenen eerst de hoek die de twee wijzers maken met een verticale as door 12 uur. Om dan de hoek te bepalen tussen de wijzers zelf maken we het verschil van deze hoeken.

- De grote wijzer maakt een hoek van 360° in 1 uur. Dit geeft dus per minuut een hoek van $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Na t minuten heeft de wijzer dus een hoek afgelegd, tenopzichte van de verticale as, gelijk aan $6^\circ t$. Als $t > 360^\circ$ moeten we eigenlijk modulo 360 werken en dan wordt de hoek weergegeven door ($k \in \mathbb{N}$)

$$\alpha_1 = 6^\circ t - k \cdot 360^\circ$$

- De kleine wijzer maakt een hoek van 360° in 12 uur of 720 minuten. Per minuut maakt hij dus een hoek van $\frac{360^\circ}{720} = 0,5^\circ$ met de verticale as. Na t minuten heeft de kleine wijzer dus een hoek afgelegd gelijk aan

$$\alpha_2 = 0,5^\circ t$$

- De hoek tussen de twee wijzers wordt weergegeven door de formule:

$$|\alpha_1 - \alpha_2|$$

- Bekijken we even de data op de tekening van vorige pagina. Het is na drie uur en de grote wijzer maakt een hoek van 60° met de verticale as, het is dus 10 minuten na drie. Maar dan maakt de kleine wijzer met de verticale as een hoek van $3 \cdot 30^\circ + 10 \cdot 0,5^\circ = 95^\circ$ en is de hoek tussen de wijzers dus $95^\circ - 60^\circ = 35^\circ$.

Speciale standen van de wijzers

Hoeveel keer staan de wijzers van een uurwerk loodrecht op elkaar gedurende 12 uren? De hoek tussen de wijzers moet dus 90° zijn. Daarom hebben we $|5,5^\circ t - k \cdot 360^\circ| = 90^\circ$. Als oplossingen vinden we dat $t = \frac{\pm 180 + k \cdot 360}{11}$, waarbij $t \in [0, 720]$. We vinden in het totaal 22 oplossingen waaronder $t = 180$ (drie uur) en $t = 540$ (negen uur).

Hoeveel keer staan de wijzers van een uurwerk boven elkaar gedurende 12 uren? Hiervoor moet $|5,5^\circ t - k \cdot 360^\circ| = 0^\circ$. Als oplossingen vinden we dat $t = \frac{k \cdot 720}{11}$, waarbij $t \in [0, 720]$. We vinden in het totaal 11 oplossingen waaronder $t = 0$ (nul uur of twaalf uur).

Hoeveel keer staan de wijzers van een uurwerk in elkaars verlengde gedurende 12 uren? Hiervoor moet $|5,5^\circ t - k \cdot 360^\circ| = 180^\circ$. Als oplossingen vinden we dat $t = \frac{\pm 360 + k \cdot 720}{11}$, waarbij $t \in [0, 720]$. We vinden in het totaal 11 oplossingen waaronder $t = 360$ (zes uur).