Eenheden in groepsringen

Hoofdstuk 1

Bicyclische eenheden

1.1 Definitie

Veronderstel dat R een willekeurige ring is met eenheidselement. Een belangrijk onderzoeksproject is het zoeken naar eenheden. Als y een linkernuldeler is en x een rechternuldeler, dan kunnen we gemakkelijk eenheden construeren.

Stelling 1.1. *Als $x, y \in R$, verschillend van 0, en $yx = 0$ dan is $\forall a \in R : 1 + xay$ een eenheid van R met invers element $1 - xay$.*

Bewijs.

$$\begin{aligned}
(1 + xay)(1 - xay) =& 1 - xay + xay - (xay)(xay) \\
=& 1 - (xa)(yx)(ay) \\
=& 1 - (xa).0.(ay) \\
=& 1
\end{aligned}$$

□

We proberen dit over te brengen naar groepsringen. Neem een deelgroep H van een eindige groep G en construeer $\tilde{H} = \sum_{h \in H} h$, een element uit de groepsring $\mathbb{Z}G$.

Stelling 1.2. *Als $H < G$ dan is, voor elke $a \in \mathbb{Z}G$: $1 + (1 - h)a\tilde{H}$ een eenheid van $\mathbb{Z}G$ met invers element $1 - (1 - h)a\tilde{H}$.*

Bewijs. Volgens vorige stelling volstaat het te bewijzen dat $(1-h)\tilde{H} = 0$. Omdat linkervermeningvuldiging met h een groepsisomorfisme is, zal $h.\tilde{H} = \tilde{H}$ en dus is $(1-h)\tilde{H} = \tilde{H} - h.\tilde{H} = \tilde{H} - \tilde{H} = 0$. $\square$

Volledig analoog bewijst men dat

Stelling 1.3. *Als $H \leq G$ dan is, voor elke $a \in \mathbb{Z}G$: $1 + \tilde{H}a(1-h)$ een eenheid van $\mathbb{Z}G$ met invers element $1 - \tilde{H}a(1-h)$.*

Veronderstel dat h een element is van eindige orde in G en beschouw de cyclische groep $\langle h \rangle$, voortgebracht door h. Construeer nu $\tilde{\langle h \rangle}$ en noteer dit verkort door $\tilde{h}$. Gebruik makend van vorige stelling definieren we voor elke $g \in G$:

$$b(g, \tilde{h}) = 1 + (1-h)g\tilde{h}$$
$$b(\tilde{h}, g) = 1 + \tilde{h}g(1-h)$$

We noemen dit de bicyclische eenheden van $\mathbb{Z}G$ van de eerste, respectievelijk tweede soort en ze werden geïntroduceerd door Ritter en Sehgal in het artikel *Construction of units in integral grouprings of finite nilpotent groups.*
De groep voortgebracht door de bicyclische eenheden van de eerste soort noteren we met $Bic_1(G)$. De groep voortgebracht door de bicyclische eenheden van de tweede soort noteren we met $Bic_2(G)$.

1.2 Eigenschappen

Veronderstel in volgende bewijzen dat de orde van h gelijk is aan d.

Stelling 1.4. $\forall h \in G : b(1, \tilde{h}) = 1 = b(h, \tilde{h})$

Bewijs.

$$\begin{aligned} b(1, \tilde{h}) =& 1 + (1-h).1.(1 + h + \cdots + h^{d-1}) \\ =& 1 + 0 \\ =& 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b(h,\tilde{h}) =& 1+(1-h).h.(1+h+\cdots+h^{d-1}) \\
=& 1+(1-h)(1+h+\cdots+h^{d-1}) \\
=& 1
\end{aligned}
$$

$\square$

Stelling 1.5. $\forall g_1, g_2, h \in G : b(g_1,\tilde{h})b(g_2,\tilde{h}) = b(g_1+g_2,\tilde{h})$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
b(g_1,\tilde{h})b(g_2,\tilde{h}) =& \left[1+(1-h)g_1(1+h+\cdots+h^{d-1})\right] \\
& \left[1+(1-h)g_2(1+h+\cdots+h^{d-1})\right] \\
=& 1+(1-h)g_1(1+h+\cdots+h^{d-1})+ \\
& (1-h)g_2(1+h+\cdots+h^{d-1}) \\
=& 1+(1-h)(g_1+g_2)(1+h+\cdots+h^{d-1}) \\
=& b(g_1+g_2,\tilde{h})
\end{aligned}
$$

$\square$

Stelling 1.6. $\forall g_1, h \in G, \forall n \in \mathbb{N} : b^n(g_1,\tilde{h}) = b(n.g_1,\tilde{h})$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
b^n(g_1,\tilde{h}) =& b(g_1,\tilde{h})\cdots b(g_1,\tilde{h}) \\
=& b(g_1+\cdots+g_1,\tilde{h}) \\
=& b(n.g_1,\tilde{h})
\end{aligned}
$$

$\square$

Stelling 1.7. $\forall g_1, h \in G : b^{-1}(g_1, \tilde{h}) = b(-g_1, \tilde{h})$

Bewijs.

$$\begin{aligned} b^{-1}(g_1, \tilde{h}) =& 1 - (1-h)g_1(1 + h + \cdots + h^{d-1}) \\ =& 1 + (1-h)(-g_1)(1 + h + \cdots + h^{d-1}) \\ =& b(-g_1, \tilde{h}) \end{aligned}$$

□

Als $b(g, \tilde{h}) = 1$ of $b(\tilde{h}, g) = 1$ spreken we van een triviale bicyclische eenheid.

Stelling 1.8. *Niet-triviale bicyclische eenheden zijn torsievrij.*

Bewijs. We weten dat $b(g, \tilde{h})^k = 1 + k(1-h)g\tilde{h}$. Hieruit volgt het gestelde. Het bewijs voor de bicyclische eenheden van de tweede soort is hetzelfde. □

Stelling 1.9. $b(g, \tilde{h})$ *is niet triviaal als en slechts als* $g \notin N_G(\langle h \rangle)$.

Bewijs. Veronderstel dat $\langle h \rangle = \{1, h, h^2, \cdots, h^{p-1}\}$. Dan is $b(g, \tilde{h}) = 1$ als en slechts als $(1-h)g(1 + h + h^2 + \cdots + h^{p-1}) = 0$. Nu is $g \in N_G(\langle h \rangle) \iff g(1 + h + h^2 + \cdots + h^{p-1}) = (1 + h + h^2 + \cdots + h^{p-1})g$. Dus als $g \in N_G(\langle h \rangle)$ dan is $(1-h)g(1+h+h^2+\cdots+h^{p-1}) = (1-h)(1+h+h^2+\cdots+h^{p-1})g = 0$. Hieruit volgt het gestelde. □

Gevolg 1.10. *Als* $H \triangleleft G$, *dan is* $N_G(H) = G$ *zodat de bicyclische eenheden met* $h \in H$ *allemaal triviaal zullen zijn.*

Gevolg 1.11. *Bij abelse groepen* G *zijn alle bicyclische eenheden triviaal.*

Stelling 1.12. *De deelgroep $Bic_1(G)$ van $U(\mathbb{Z}G)$, voortgebracht door de bicyclische eenheden $b(g, \tilde{h})$ met $h, g \in G$ bevatten alle eenheden van de vorm $1 + (1 - h)a\tilde{H}$ met $H < G$ en $a \in \mathbb{Z}G$.*

Bewijs. Veronderstellen we dat de orde van h gelijk is aan d. We verdelen het bewijs in twee delen:

- Bekijken we eerst de eenheden van de vorm $1 + (1 - h)g\tilde{H}$ met $h \in H$. Omdat $A = \langle h \rangle$ een deelgroep is van H, is $H = A \cup x_1 A \cup \cdots \cup x_q A$. Bijgevolg is $\tilde{H} = 1 + h + \cdots h^{d-1} + x_1 + x_1 h + \cdots + x_1 h^{d-1} + \cdots + x_q + x_q h \cdots + x_q h^{d-1}$. Hieruit volgt dat $1 + (1 - h)g\tilde{H} = b(g, h)b(gx_1, h). \cdots .b(gx_q, h)$.

- Bekijken we nu de eenheden van de vorm $1 + (1 - h)a\tilde{h}$ met $a \in \mathbb{Z}G$. Omdat $H = \{h_1, \cdots, h_p\} < G$ kunnen we a schrijven als $a = a_1 h_1 + \cdots + a_p h_p + a_{p+1} h_1 d_1 + \cdots + a_{2p} h_p d_1 + \cdots + a_{sp-s+1} h_1 d_{s-1} + \cdots + a_{sp} h_p d_{s-1}$. Hieruit volgt dat $1 + (1 - h)a\tilde{h} = g(h_1^{a_1}, h). \cdots .g((h_p d_{s-1})^{a_{sp}}, h)$

Door het combineren van deze twee stappen vinden we het gestelde. $\square$

Stelling 1.13. $Bic_1(G) \cong Bic_2(G)$

Bewijs. We definieren de functie f tussen $Bic_1(G)$ en $Bic_2(G)$, waarbij elk woord geschreven met bicyclische eenheden van de eerste soort omgezet wordt in een woord met de overeenkomstige bicyclische eenheden van de tweede soort. Deze f is duidelijk een isomorfisme waaruit her getselde volgt. $\square$

1.3 Een voorbeeld

Neem $S_3 = \{s, t : s^3 = t^2 = 1 \text{ en } ts = s^2 t\}$.

- Omdat $H = \{1, s, s^2\}$ een normaaldeler is van S_3, kan h enkel gelijk zijn aan t, st of $s^2 t$.

- Als $h = t$, dan is $N_G(\langle t \rangle) = \{1, t\}$ en hebben we voor g vier mogelijkheden: $s, s^2, st, s^2 t$. We noteren de bicyclische eenheid $b(s, \tilde{t}) = 1 + s - s^2 + st - s^2 t$ met b_1. Verder is ook $b(st, \tilde{t}) = b_1$. Het invers element van b_1 is $b_1^{-1} = b(s^2, \tilde{t}) = b(s^2 t, \tilde{t}) = 1 - s + s^2 - st + s^2 t$.

- Voor $h = s^2t$ vinden we $b_2 = b(s, \tilde{s^2t}) = b(t, \tilde{s^2t}) = 1 + s - s^2 + t - st$. Het invers element is $b_2^{-1} = b(s^2, \tilde{s^2t}) = b(st, \tilde{s^2t}) = 1 - s + s^2 - t + st$.

- Voor $h = st$ vinden we $b_3 = b(s, \tilde{st}) = b(t, \tilde{st}) = 1 + s - s^2 - t + s^2t$. Het invers element is $b_3^{-1} = b(s^2, \tilde{st}) = b(s^2t, \tilde{st}) = 1 - s + s^2 + t - s^2t$.

- $Bic_1(G) = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$.

- De bicyclische eenheden van de tweede soort noetren we met accenten. Zo is $b'_1 = b(\tilde{t}, s) = 1 + s - s^2 - st + s^2t = b(\tilde{t}, s^2t)$ en $b_1'^{-1} = b(\tilde{t}, s^2) = b(\tilde{t}, st) = 1 - s + s^2 + st - s^2t$.

- Verder is $b'_2 = b(\tilde{s^2t}, s) = 1 + s - s^2 - t + st = b(\tilde{s^2t}, st)$ en $b_2'^{-1} = b(\tilde{s^2t}, s^2) = b(\tilde{s^2t}, t) = 1 - s + s^2 + t - st$.

- Tenslotte is $b'_3 = b(\tilde{st}, s) = 1 + s - s^2 + t - s^2t = b(\tilde{st}, t)$ en $b_2'^{-1} = b(\tilde{st}, s^2) = b(\tilde{st}, s^2t) = 1 - s + s^2 - t + s^2t$.

- $Bic_2(G) = \langle b'_1, b'_2, b'_3 \rangle$.