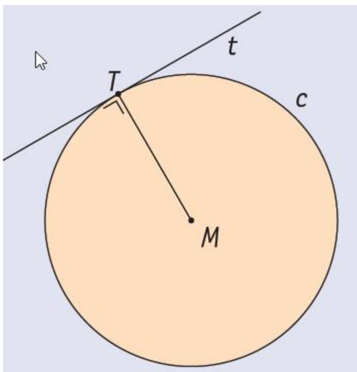
Rakende cirkels

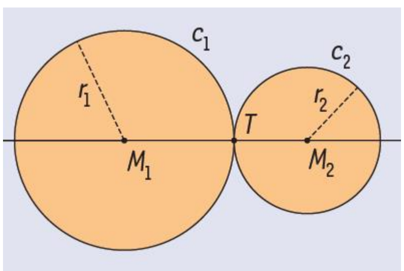
1 Inleiding

We geven eerst wat basiseigenschappen over rakende cirkels en raaklijnen aan een cirkel.

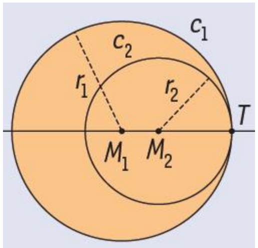
- De raaklijn staat, in het raakpunt T , loodrecht op de straal.



- Bij uitwendig rakende cirkels liggen de middelpunten en het raakpunt op 1 lijn (de centraal genoemd) en de afstand tussen de twee middelpunten is gelijk aan de som van de stralen. De gemeenschappelijke raaklijn in het raakpunt T staat loodrecht op de centraal.

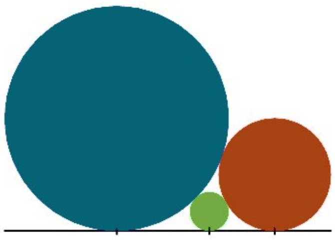


- Bij inwendig rakende cirkels liggen de middelpunten en het raakpunt op 1 lijn (de centraal genoemd) en de afstand tussen de twee middelpunten is gelijk aan het verschil van de stralen. De gemeenschappelijke raaklijn in het raakpunt T staat loodrecht op de centraal.



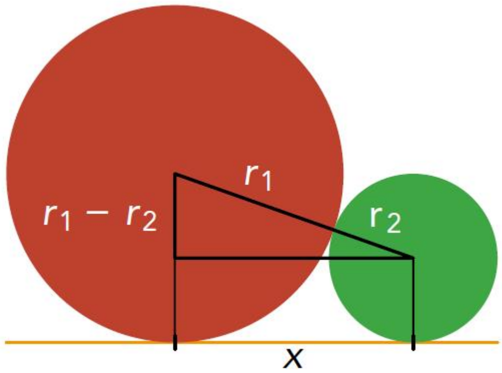
In deze tekst gaan we problemen onderzoeken waarbij we een cirkel proberen te klemmen tussen andere cirkels of rechten. Met klemmen bedoelen we dat ge gezochte cirkel moet raken aan de andere cirkels of rechten.

2 Twee cirkels en een raaklijn



Zoek een verband tussen de stralen van 3 cirkels die 2 aan 2 uitwendig raken in 3 verschillende raakpunten en een gemeenschappelijke raaklijn hebben

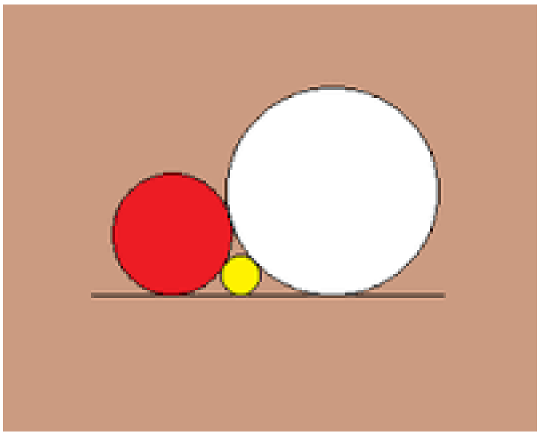
We zoeken eerst de afstand x tussen de twee raakpunten van de twee gegeven cirkels.



Volgens de stelling van Pythagoras is:

$$(r_1 + r_2)^2 = x^2 + (r_1 - r_2)^2$$

Hieruit volgt dat $x = 2\sqrt{r_1 r_2}$.



We kunnen tussen de 2 gegeven cirkels c_1 en c_2 een kleintje c_3 tussenpassen. Noteer de afstanden tussen de raakpunten op de rechte met x_1 en x_2. Noteer met r_3 de straal van de gezochte cirkel. Dan geldt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ x = 2\sqrt{r_1 r_2} \\ x_1 = 2\sqrt{r_1 r_3} \\ x_2 = 2\sqrt{r_2 r_3} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$. Na deling door $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ geeft dit:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

Bijgevolg is de straal van de gezochte cirkel gelijk aan:

$$\boxed{r_3 = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}}$$

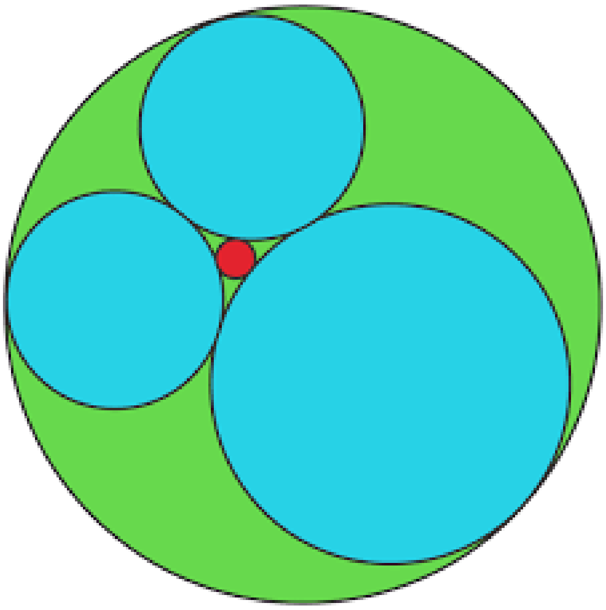
We kunnen ook gebruik maken van de kromming van een cirkel. De kromming van een cirkel is gelijk aan het omgekeerde van haar straal: $k = \dfrac{1}{r}$.
uit $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$ volgt dat $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$. Dus:

$$\boxed{k_3 = k_1 k_2 + 2\sqrt{k_1 k_2}}$$

Kwadrateren geeft $\dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_1}\dfrac{1}{r_2} + \dfrac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}$. De wortel afzonderen en nogmaals kwadrateren geeft dan $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} + \dfrac{1}{r_3^2} = \dfrac{2}{r_1 r_3} + \dfrac{2}{r_2 r_3}\dfrac{2}{r_1 r_2}$. Hieruit volgt dan dat $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} + \dfrac{1}{r_3^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}\right)^2$.
Herschreven met krommingen hebben we dan volgende impliciete betrekking:

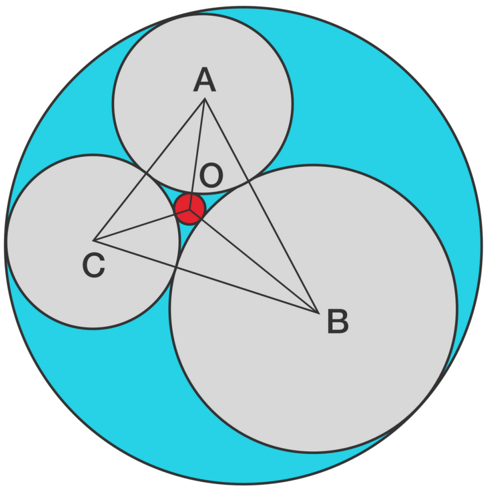
$$\boxed{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3)^2}$$

3 Drie cirkels



Zoek een verband tussen de stralen van 4 cirkels die 2 aan 2 uitwendig raken in 6 verschillende raakpunten.

De tekening laat veronderstellen dat er twee oplossingen zijn: de rode en de groene cirkel. We gaan gebruik maken van de cosinusregel en goniometrische betrekkingen.



De cirkel met middelpunt A heeft straal r_1 en die met middelpunt B heeft straal r_2. De rode cirkel heeft straal r_4. In driehoek AOB geldt dan dat: $(r_1 + r_2)^2 = (r_1 + r_4)^2 + (r_2 + r_4)^2 - 2(r_1 + r_4)(r_2 + r_4)cos\gamma$

Hieruit kunnen we $cos\gamma$ oplossen: $cos\gamma = 1 - \frac{2r_1r_2}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)}$

Wanneer we de hoeken in O van de driehoeken AOC en BOC respectievelijk β en α noemen, vinden we analoog:

$cos\beta = 1 - \frac{2r_1r_3}{(r_1+r_4)(r_3+r_4)}$ en $cos\alpha = 1 - \frac{2r_2r_3}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)}$

Omdat $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$ kunnen we de identiteit $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ gebruiken. We vullen bovenstaande betrekkingen, waarbij we de termen na 1 door a, b en c vervangen. Dan moet $(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2 = 1+2(1-a)(1-b)(1-c)$. Of $a^2+b^2+c^2+2abc = 2ab+2ac+2bc-2abc$.

Na deling door abc krijgen we: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+2 = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. Vervangen we nu a, b en c terug: $\frac{(r_3+r_4)^2}{r_3^2}+\frac{(r_2+r_4)^2}{r_2^2}+\frac{(r_1+r_4)^2}{r_1^2}+2 = 3+\frac{2r_4}{r_3}+\frac{2r_4}{r_2}+\frac{2r_4}{r_1}+\frac{r_4^2}{r_1r_2}+\frac{r_4^2}{r_1r_3}+\frac{r_4^2}{r_2r_3}$.

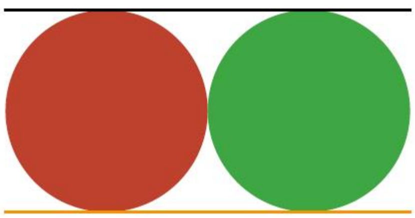
Met krommingen wordt dit: $\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{k_4^2}+2 = \frac{k_1k_2+k_2k_3+k_1k_2}{k_4^2}$.

Of tenslotte:

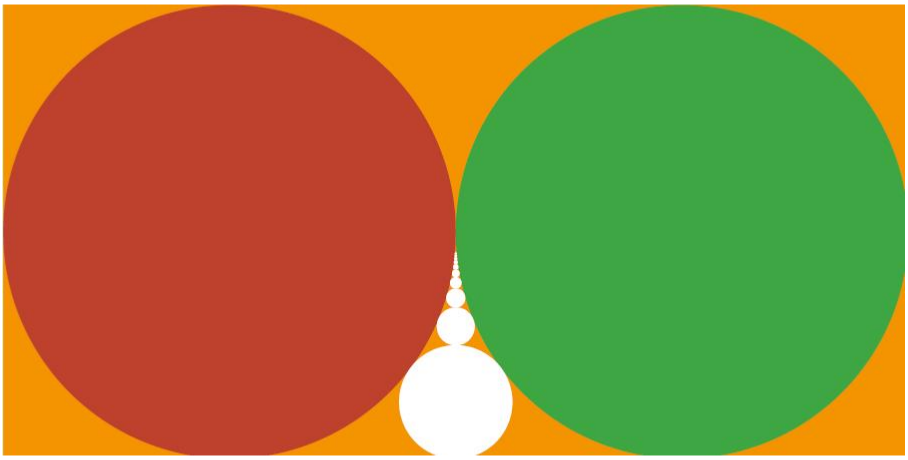
$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3+k_4)^2$$

We zien dat dit een veralgemening is van het resultaat van 2 cirkels en een rechte. We kunnen hierbij een rechte bekijken als een soort ontaarde cirkels met als straal oneindig, dus een kromming gelijk aan 0. Als we uit die impliciete betrekking k_4 zelf berekenen vinden we dat $k_4 = k_1+k_2+k_3 \pm 2\sqrt{k_1k_2+k_2k_3+k_1k_3}$. We vinden dus inderdaad twee oplossingen.

Eén cirkel en twee rechten zou dat de betrekking $k_1^2+k_2^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)^2$ geven en hieruit volgt dat $k_2 = k_1$ of $r_2 = r_1$.



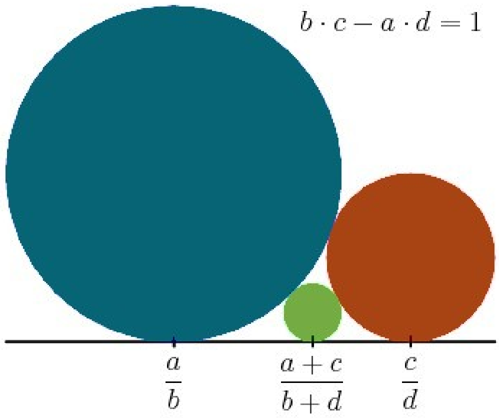
4 Een sneeuwpop



Veronderstel dat de straal van de twee grote cirkels gelijk is aan 1. Op de tekening zie je oneindig veel witte cirkels boven elkaar. De vraag is hoe hoog is die 'sneeuwpop'?

- om de hoogte te kennen moeten we de diamaters van al de witte cirkels bij elkaar optellen.
- Uit sectie 2 vinden we dat de grote cirkel onderaan als straal $r = \dfrac{1.1}{(\sqrt{1}+\sqrt{1})^2} = \dfrac{1}{4}$ heeft. De diameter is dan $\dfrac{1}{2}$.
- De tweede witte cirkel raakt aan de rode, de groene en de eerste witte cirkel. Hiervoor gebruiken we sessie 3. Nu is $k_1 = k_2 = 1$ en $k_3 = 4$. Dus $1+1+16+k_4^2 = \dfrac{1}{2}(1+1+4+k_4)^2$. Hieruit volgt dat $k_4 = 12$ en dus is de diameter van die tweede witte cirkel gelijk aan $\dfrac{1}{6}$.
- voor d ederde witte cirkel vinden we uit $1+1+144+k_4^2 = \dfrac{1}{2}(1+1+12+k_4)^2$ dat de diameter gelijk is aan $\dfrac{1}{12}$.
- De hoogte H van de sneeuwpop is dan $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\cdots$. We zien dat de algemene term gelijk is aan $\dfrac{1}{n(n+1)}$.
- $H = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$

5 Fordcirkels



De breuken onder de lijn geven de relatieve positie aan van de streepjes. Enige vraag die we ons hierbij kunnen stellen is: hoe groot zijn de cirkels? Of anders gezegd, bepaal r_1, r_2 en r_3. Uit de figuur kunnen we x, x_1 en x_2 halen, en, rekening houdend met het extra gegeven dat b.c - a.d = 1 is het dan opnieuw niet zo moeilijk om in te zien dat we voor de stralen het volgende vinden:

$$r_1 = \frac{1}{2b^2},\ r_2 = \frac{1}{2d^2},\ r_3 = \frac{1}{2(b+d)^2}$$

Dit inzicht laat ons toe verder te gaan. Als we starten met twee cirkels bij de breuken a/b = 0/1 en c/d = 1/1, dan kunnen we (zoals hierboven) nieuwe cirkels, de Ford cirkels genoemd, blijven toevoegen, en dit levert de volgende figuur