Hoofdstuk 10

Eenheden van $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$

10.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}(C_4 \times C_2)$

Stel $C_4 \times C_2 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\} = \{a, b : a^4 = b^2 = 1\}$.
Definieer vervolgens $\mathbb{Q}(C_4 \times C_2) = \{a_0 + a_1 a + \cdots + a_7 a^3 b : a_i \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(C_4 \times C_2), +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

$C_4 \times C_2$ is een abelse groep met acht toevoegingsklassen en dus acht irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{array}{llrr}
\rho_1 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q} & : a \mapsto & 1 \text{ en } b \mapsto & 1 \\
\rho_2 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q}(i) & : a \mapsto & i \text{ en } b \mapsto & 1 \\
\rho_3 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q} & : a \mapsto & -1 \text{ en } b \mapsto & 1 \\
\rho_4 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q}(i) & : a \mapsto & -i \text{ en } b \mapsto & 1 \\
\rho_5 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q} & : a \mapsto & 1 \text{ en } b \mapsto & -1 \\
\rho_6 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q}(i) & : a \mapsto & i \text{ en } b \mapsto & -1 \\
\rho_7 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q} & : a \mapsto & -1 \text{ en } b \mapsto & -1 \\
\rho_8 : C_4 \times C_2 \to \mathbb{Q}(i) & : a \mapsto & -i \text{ en } b \mapsto & -1
\end{array}$$

We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}(C_4 \times C_2)$. Noteer $x = a_0 + a_1 a + \cdots + a_7 a^3 b$, dan is:

$$\begin{aligned}
\rho_1(x) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\
\rho_3(x) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 \\
\rho_5(x) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 \\
\rho_7(x) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 \\
\rho_2(x) &= (a_0 - a_2 + a_4 - a_6) + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7)i \\
\rho_4(x) &= (a_0 - a_2 + a_4 - a_6) + (a_3 - a_1 + a_7 - a_5)i \\
\rho_6(x) &= (a_0 - a_2 - a_4 + a_6) + (a_1 - a_3 - a_5 + a_7)i \\
\rho_8(x) &= (a_0 - a_2 - a_4 + a_6) + (a_3 - a_1 - a_7 + a_5)i
\end{aligned}$$

We definiëren tenslotte: $\rho = (\rho_1, \rho_3, \rho_5, \rho_7, \rho_2, \rho_6)$ via

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

Hierbij zijn de vier eerste componenten respectievelijk $\rho_1(x), \rho_3(x), \rho_5(x)$ en $\rho_7(x)$. De vijfde en zesde component zijn het reëel en imaginair deel van $\rho_2(x)$. De zevende en achtste component zijn het reëel en imaginair deel van $\rho_6(x)$. Het is duidelijk dat:

Stelling 10.1. $\mathbb{Q}(C_4 \times C_2) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) \oplus \mathbb{Q}(i)$ *als $\mathbb{Q}$-algebra*

10.2 De groepsring $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i)$ is de ring der gehelen van $4.\mathbb{Q} \oplus 2.\mathbb{Q}(i)$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}(C_4 \times C_2)$ noteren we met H. Uiteraard is $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$ een deel van H omdat elk element van $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$ afgebeeld wordt op een element van $4.\mathbb{Z} \oplus 2.\mathbb{Z}(i)$. Dus $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2) \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{4}(1 + a + a^2 + a^3)$ een geheel van $\mathbb{Q}(C_4 \times C_2)$ omdat $x^2 - x = 0$ en toch is x geen element van $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$. Bijgevolg komt $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$ slechts overeen met een deel van $4.\mathbb{Z} \oplus 2.\mathbb{Z}(i)$.

Stelling 10.2. $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2) \cong \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 + x_5 i, +x_6 + x_7 i) \in 4.\mathbb{Z} \oplus 2.\mathbb{Z}(i) : x_4 \equiv x_6 \ mod\ 2 \ en\ x_5 \equiv x_7 \ mod\ 2 \ en\ x_3 \equiv x_6 + x_7 \ mod\ 2 \ en\ x_2 + x_3 \equiv 2x_6 \ mod\ 4 \ en\ x_1 + x_3 \equiv x_4 - x_5 + x_6 - x_7 \ mod\ 4 \ en\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \equiv 2x_4 + 2x_6 \ mod\ 8\}$

Bewijs. Stel $\rho(\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)) = A$. Nu is: $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4+x_5 i, +x_6+x_7 i) \in A$

$$\iff \exists a_0, \cdots, a_7 \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a_0, \cdots, a_7 \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 \equiv 0 \bmod 8 \\ -2x_1 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 2x_6 + 2x_7 \equiv 0 \bmod 8 \\ -2x_2 - 2x_3 - 4x_6 \equiv 0 \bmod 8 \\ 4x_3 + 4x_6 - 4x_7 \equiv 0 \bmod 8 \\ -4x_4 + 4x_6 \equiv 0 \bmod 8 \\ -4x_5 + 4x_7 \equiv 0 \bmod 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \equiv 2x_4 + 2x_6 \bmod 8 \\ x_1 + x_3 \equiv x_4 - x_5 + x_6 - x_7 \bmod 4 \\ x_2 + x_3 \equiv 2x_6 \bmod 4 \\ x_3 \equiv x_6 + x_7 \bmod 2 \\ x_4 \equiv x_6 \bmod 2 \\ x_5 \equiv x_7 \bmod 2 \end{cases}$$

□

10.3 Eenheden in $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$

Stelling 10.3. *Alle eenheden van $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$ zijn triviaal of $U(\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)) = \pm C_4 \times C_2$*

Bewijs. We bepalen eerst de eenheden van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i)$. Nu geldt dat $U(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i)) = U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{Z}(i)) \oplus U(\mathbb{Z}(i))$. In het totaal hebben we 256 eenheden. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten. De elementen van de vorm $(.,.,.,.,\pm 1, \pm i)$ en $(.,.,.,.,\pm i, \pm 1)$ behoren al niet tot A. Bestuderen we eerst de situatie dat $x_7 = x_5 = 0$. Voor x_6 heb je twee mogelijkheden: $+1$ en -1. Veronderstel dat $x_6 = 1$, dan moet $x_2 + x_3 \equiv 2 \bmod 4$. Dit kan als $x_2 = x_3 = 1$ of $x_2 = x_3 = -1$. Nemen we het eerste geval dan vinden we de eenheden $(1,1,1,1,1,1)$ en $(-1,-1,1,1,-1,1)$. Dit geeft de elementen $1, -b$ in $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$. Analoog voor al de andere gevallen. We vinden de eenheden $(\ 1,\ 1,-1,-1,-1,\ 1), (-1,-1,-1,-1,\ 1,\ 1), (-1,-1,\ 1,\ 1,\ 1,-1)$, $(\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,-1,-1), (\ 1,\ 1,-1,-1,\ 1,-1), (-1,-1,-1,-1,-1,-1)$, $(-1,\ 1,\ 1,-1,\ i,\ i), (\ 1,-1,\ 1,-1,-i,\ i), (-1,\ 1,-1,\ 1,\ i,\ i)$, $(\ 1,-1,-1,\ 1,-i,\ i), (\ 1,-1,\ 1,-1,-i,-i), (-1,\ 1,\ 1,-1,\ i,-i)$, $(\ 1,-1,-1,\ 1,\ i,-i), (-1,\ 1,-1,\ 1,-i,-i)$ in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i)$. Zo vinden we uiteindelijk enkel de 16 triviale eenheden.

$\square$

Er zijn dus 240 elementen van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i)$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}(C_4 \times C_2))$. Zo komt met $(1,1,1,1,1,i)$ het element $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}a^3b$ overeen. Dit zijn elementen van H die niet in $\mathbb{Z}(C_4 \times C_2)$ zitten.