Hoofdstuk 1

Inleiding

Het binomiaalgetal $\binom{n}{p}$ berekent het aantal p-combinaties van n elementen; dit is het aantal mogelijkheden om p elementen te nemen uit n beschikbare elementen. Hierbij is herhaling niet toegestaan en speelt de volgorde van de elementen geen rol. Met een *p-deel* van een verzameling A bedoelen we een deelverzameling van A met precies p elementen.
Als $0 \leq p \leq n$, dan kennen we de formule

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Als echter $p > n$, dan definieren we $\binom{n}{p} = 0$. Om verbanden tussen de binomiaalgetallen te bewijzen kunnen we gebruik maken van bovenstaande formule. Vaak geeft dit aanleiding tot technisch moeilijk rekenwerk. Vandaar dat we in volgende sectie een andere werkmethode willen geven, steunend op eenvoudige begrippen uit de verzamelingenleer. Als we in volgend hoofdstuk, p elementen nemen uit een willekeurige verzameling, dan veronderstellen we steeds dat dit gebeurt zonder herhaling en volgorde.
We vinden de binomiaalgetallen terug in de driehoek van Pascal.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
\end{array}$$

Hoofdstuk 2

Formules

Stelling 2.1.

$$\textit{Voor } n \geq p \geq 0 \textit{ geldt } \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Bewijs. Neem A een verzameling met n elementen en B een verzameling met 1 element. Beschouw $A \cup B$. Dit is een verzameling met n+1 elementen. Geven we twee mogelijke formuleringen om de formule te bewijzen:

- Het linkerlid van de formule telt het aantal mogelijkheden om $p+1$ elementen te nemen uit de $n+1$ beschikbare elementen. Dit kan gebeuren door ofwel $p+1$ elementen te nemen uit A ofwel door p elementen te nemen uit A en het ene element van B. Het rechterlid geeft het aantal mogelijkheden om dit te doen.

- Het linkerlid van de formule geeft het aantal $(p+1)$-delen van $A \cup B$. Je kan ofwel $(p+1)$-delen nemen uit A en zo zijn er $\binom{n}{p+1}$. Ofwel kan je p-delen nemen uit A en het ene element van B. Dit kan op $\binom{n}{p}$ manieren. Hieruit volgt het gestelde.

□

Stelling 2.2.

$$\textit{Voor } n \geq p \geq 1 \textit{ geldt } \binom{n}{p}.p = \binom{n-1}{p-1}.n$$

Bewijs. Neem A een verzameling met n personen. Geven we weer twee mogelijke formuleringen:

- We willen uit A een groep van p personen kiezen, waarbij één persoon de voorzitter is van de groep. Dit kan gebeuren door eerst p personen te kiezen uit A en dan 1 persoon hieruit tot voorzitter te kiezen. Dit kan op $\binom{n}{p}.\binom{p}{1} = \binom{n}{p}.p$ manieren. Je kan echter ook eerst een willekeurige persoon uit A tot voorzitter kiezen en dan nog $p-1$ andere personen kiezen uit de resterende $n-1$ personen. Dit kan op $\binom{n}{1}.\binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}.n$ manieren. Hieruit volgt de gegeven formule.

- We weten dat A juist $\binom{n}{p}$ verschillende p-delen bevat. In het totaal bevatten deze p-delen $\binom{n}{p}.p$ elementen. Deze elementen zijn niet alle verschillend. Elk van de n elementen van A komt in $\binom{n-1}{p-1}$ verschillende p-delen van A voor. Hieruit volgt het gestelde.

□

Stelling 2.3.

Voor $n \geq p \geq 2$ *geldt* $$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2.\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

Bewijs. Neem A een verzameling met n personen en neem twee elementen apart in B. De overige $n-2$ elementen plaatsen we in C. We moeten p elementen nemen uit A. Dit kan op drie manieren:

- Neem p elementen uit C: $\binom{n-2}{p}$ mogelijkheden.

- Neem $p-1$ elementen uit C en 1 element uit B: $\binom{n-2}{p-1}.\binom{2}{1} = 2.\binom{n-2}{p}$ mogelijkheden.

- Neem $p-2$ elementen uit C en de twee elementen van B: $\binom{n-2}{p-2}.\binom{2}{2} = \binom{n-2}{p-2}$ mogelijkheden.

Hieruit volgt het gevraagde. □

Volgende stelling is een veralgemening van vorig resultaat.

Stelling 2.4.

$$\textit{Voor } n_1 + n_2 \geq p \geq 0 \textit{ geldt } \sum_{k=0}^{p} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k} = \binom{n_1+n_2}{p}$$

Bewijs. Verdeel A in twee delen A en A_2 met respectievelijk n_1 en n_2 elementen. We willen het aantal p-delen van A berekenen. Neem daarvoor k elementen uit A_1 en $p-k$ elementen uit A_2 en varieer k van 0 tot p. □

Stelling 2.5.

$$\textit{Voor } n \geq p \geq 0 \textit{ geldt } \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}.2^{n-p}$$

Bewijs. Bereken het aantal p-delen van elke mogelijke deelverzameling van A. Uiteraard moet zo een deelverzameling minstens p elementen bevatten. We kunnen dit op twee manieren berekenen:

- Enerzijds heeft elk k-deel van A (met $k \geq p$)$\binom{k}{p}$ verschillende p-delen en A heeft $\binom{n}{k}$ verschillende k-delen. Het gezochte totaal is dus:

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p}$$

- Anderzijds is elk p-deel van A een deelverzameling van 2^{n-p} deelverzamelingen van A. We kunnen immers bij het p-deel elke mogelijke deelverzameling uit het complement ervan toevoegen. het complement telt $n-p$ elementen en heeft dus 2^{n-p} mogelijke deelverzamelingen. Omdat verder A , zoals we weten, $\binom{n}{p}$ verschillende p-delen heeft, is het gezochte aantal ook gelijk aan

$$\binom{n}{p}.2^{n-p}$$

Hiermee is de formule bewezen. □

Gevolg 2.6. *Wanneer we in vorige formule $p = 1$ nemen, vinden we*

$$\text{Voor } n \geq 1 \text{ geldt } \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.k = n.2^{n-1}$$

Stelling 2.7.

$$\text{Voor } n \geq p \geq 0 \text{ geldt } \sum_{i=0}^{k} i.\binom{p}{i}\binom{n-p}{k-i} = p.\binom{n-1}{k-1}$$

Bewijs. Neem een welbepaald p-deel van A. Noem dit B. Bestudeer alle k-delen van A en tel voor elk k-deel hoeveel elementen er in B zitten. Bereken nu de som van al die aantallen op twee manieren:

- Elk element van B komt voor in $\binom{n-1}{k-1}$ verschillende k-delen. De gezochte som is dus $p.\binom{n-1}{k-1}$.
- Neem i een willekeurig natuurlijk getal tussen 0 en k. Het aantal k-delen dat juist i elementen in B heeft is $\binom{p}{i}\binom{n-p}{k-i}$. De bijdrage in de gezochte som is dan $i.\binom{p}{i}\binom{n-p}{k-i}$.

Hiermee is het bewijs geleverd. $\square$

Stelling 2.8.

$$\text{Voor } n \geq p \geq 1 \text{ geldt } \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

Bewijs. Veronderstel dat $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ een geordende verzameling is met n elementen. Neem een willekeurig element x_k van A, waarbij $k \geq p$. Het aantal verschillende p-delen van A waarbij x_k het laatste element is gelijk aan $\binom{k-1}{p-1}$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$