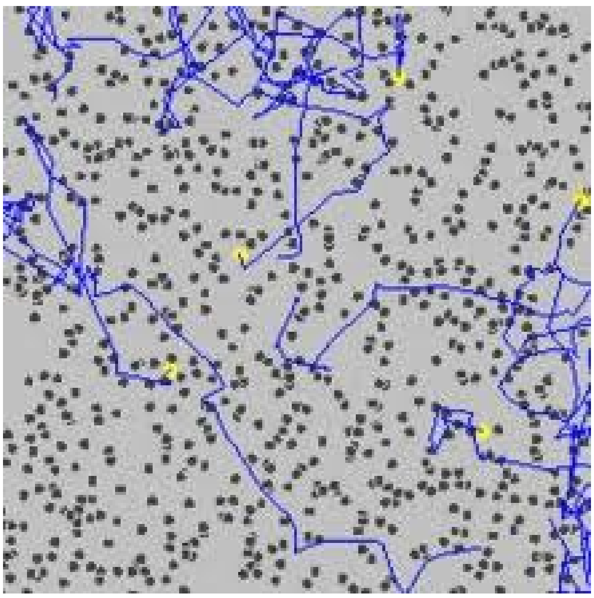
Hoofdstuk 1

Inleiding

Stochastische wandelingen horen thuis in de wereld de stochastische processen, een tak van de kansrekening. Om alvast een idee te krijgen van wat zo een stochastisch proces kan betekenen, geven we het voorbeeld van de *Brownse beweging* . De brownse of browniaanse beweging is een natuurkundig verschijnsel, in 1827 beschreven door de Schotse botanicus Robert Brown bij onderzoek van stuifmeelkorrels in een vloeistof onder de microscoop. Hij merkte op dat de deeltjes, hoewel bestaande uit dode materie, een onregelmatige eigen beweging vertoonden en volgens een toevallig aandoend patroon in alle richtingen weg konden schieten. Wanneer deze aaneenschakeling van minuscule toevallige verplaatsingen lang genoeg duurt, verplaatst een dergelijk deeltje zich geleidelijk.



De Brownse beweging is erg ingewikkeld omdat het deeltje op elk tijdstip kan veranderen en op elk tijdstip zijn een oneindig aantal nieuwe richtingen mogelijk.
Om tot eenvoudiger processen te komen bekijken we enkele simpele symmetrische stochastische wandelingen in d dimensies. Hier beweegt een fictieve wandelaar over het rooster $\mathbb{Z}^d$ door vanuit een punt naar n van de 2d buurpunten te lopen. Bij elke stap die hij doet zijn alle 2d richtingen even waarschijnlijk. Bovendien zijn alle stappen onafhankelijk van elkaar. De stochastische wandeling wordt ook wel eens de dronkemanswandeling genoemd, omdat de stappen van een (echt) dronken man goed gemodelleerd zouden kunnen worden met toevallige gebeurtenissen. Wie zijn verbeelding laat werken kan verschillende vragen stellen over deze bizarre wandelingen. In dit artikel zullen we er twee behandelen:

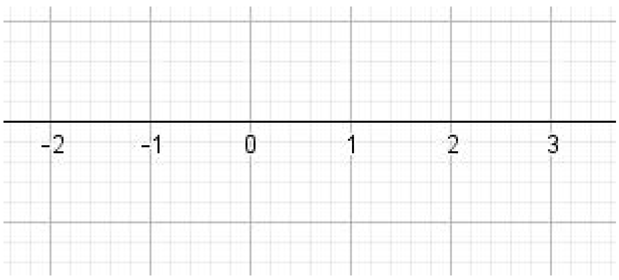
1. Wat is de kans dat het deeltje bij de n-de stap terug in de beginpositie (de oorsprong) is?
2. Keert het deeltje met zekerheid ooit terug naar zijn beginpositie? Dit maakt deel uit van een bekende *stelling van Pólya* die zegt dat het deeltje zeker terugkomt naar de beginpositie enkel en alleen als de wandeling gebeurt in 1 of 2 dimensies. De stelling van Plya is ook wel eens als volgt geformuleerd: a drunken man will always come home, but a drunken bird never will. De stelling zegt echter niets over het tijdstip van de eerste terugkomst in de oorsprong.

Hoofdstuk 2

Eéndimensionele wandelingen

2.1 Afspraken

Op tijdstip $t = 0$ bevindt het deeltje zich in 0. Op elk tijdstip $t = 0, 1, 2, \cdots$ springt het deeltje ofwel 1 eenheid naar rechts (met kans $\frac{1}{2}$) of 1 eenheid naar links (met kans $\frac{1}{2}$).



Voor $n = 1, 2, \cdots$ noteren we u_n als de kans dat de n-de stap de terugkeer naar de oorsprong realiseert. Een stap naar rechts kunnen we noteren met $+1$, een stap naar links met -1. Een pad van n stappen kan dus bekeken worden als een keten van n symbolen $+1$ of -1. Zo is bijvoorbeeld $(+1, +1, +1, +1, -1)$ een pad van 5 stappen die ons brengt van de oorsprong naar positie 3.

2.2 Terugkeer naar de oorsprong in n stappen

Stelling 2.1. *Een oneven aantal stappen brengt ons nooit terug naar de oorsprong.*

Bewijs. Om de eindpositie te kennen van het deeltje moeten we alle symbolen $+1$ en -1 van het pad bij elkaar optellen. Om als resultaat 0 te krijgen moeten er evenveel symbolen +1 zijn als symbolen −1. Maar dan bevat het pad steeds een even aantal stappen. □

Gevolg 2.2. *Er geldt dus :* $u_{2n+1} = 0$

Stelling 2.3. *De kans om in* $2n$ *stappen terug te keren naar de oorsprong is*

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Bewijs. Aangezien elk pad met $2n$ stappen dezelfde kans heeft, komt het berekenen van u_{2n} neer op het berekenen van de verhouding van het aantal "gunstige"paden tot het totaal aantal "mogelijke "paden. Bij elke stap heb je 2 keuzemogelijkheden (+1 of −1), dus het totaal aantal mogelijkheden is 2^{2n}. Om in de oorsprong terug te keren, moeten er evenveel keer +1 als −1 voorkomen. Dit is het aantal herhalingspermutaties van n symbolen +1 en n symbolen −1 en dat is gelijk aan $\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$.Hieruit volgt het gestelde. □

Berekenen we even een paar mogelijkheden:

n	u_{2n}
1	$0,5$
2	$0,375$
3	$0,3125$
4	$0,273438$
5	$0,246094$

2.3 Is er ooit een terugkeer naar de oorsprong?

Als we de som maken van alle u_{2n}, bekomen we dan de kans op een terugkeer naar de oorsprong? Neem het pad $(+1,-1,+1,-1)$. Dit is, één van de gunstige mogelijkheden om u_4 te berekenen, maar we zien dat we al na 2 stappen in de oorsprong terugkeren. We gaan zo dus mogelijkheden dubbel tellen. Definieer dan f_n als de kans dat de n-de stap ons, *voor het eerst* terug brengt naar de oorsprong. Het is onmiddellijk duidelijk dat $f_{2n+1} = 0$.

Ook is duidelijk, omdat terugkeren gebeurt in 2 stappen, of 4 stappen of $\cdots$, dat

$$P = \text{ De kans op terugkeer } = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$$

Hoe berekenen we nu het verband tussen u_n en f_n? proberen we eens met $n = 6$. We berekenen de kans om in 6 stappen terug in de oorsprong te geraken:

- We zijn eerst in 2 stappen terug en dan doen we nog 4 stappen: $f_2.u_4$.
- Of we zijn eerst in 4 stappen terug in de oorsprong en dan nog 2 stappen: $f_4 u_2$.
- Of we zijn eerst in 6 stappen terug in de oorsprong: f_6

We vinden dus dat $u_6 = f_2.u_4 + f_4 u_2 + f_6$.
Andere verbanden:

$$\begin{aligned}
&u_2 = f_2 \\
&u_4 = f_2 u_2 + f_4 \\
&u_6 = f_2.u_4 + f_4 u_2 + f_6 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Door dit oneindig lang te herhalen en gepast op te tellen vinden we (Noteer $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$) : $S = f_2(1+S) + f_4(1+S) + \cdots$ of $S = P(1+S)$, wat ons uiteindelijk geeft dat

$$P = \frac{S}{1+S}$$

De vraag is nu of S wel degelijk 'bestaat', of met andere woorden de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ convergent of divergent is. Als de reeks divergeert dan is het duidelijk dat $P = 1$ en als de reeks convergeert naar S, dan is $P < 1$. De formule van Stirling zegt ons dat $n! \sim n^{n+0,5} e^{-n}\sqrt{2\pi}$. Hieruit volgt dat $u_{2n} \sim 2^{-2n} \dfrac{(2n)^{2n+0,5} e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Omdat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ divergeert zal ook de reeks u_{2n} divergeren en vinden we tenslotte:

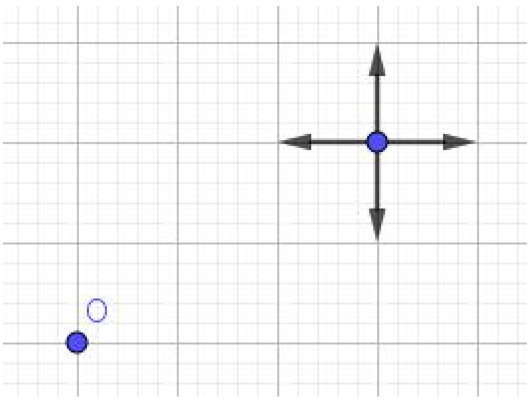
Stelling 2.4. *De kans om terug te keren naar de oorsprong in het ééndimensionale geval is* 100%.

Hoofdstuk 3

Twee dimensionele wandelingen

3.1 Afspraken

Op tijdstip $t = 0$ bevindt het deeltje zich in $(0,0)$. Op elk tijdstip $t = 0, 1, 2, \cdots$ springt het deeltje ofwel 1 eenheid naar rechts (met kans $\frac{1}{4}$) , 1 eenheid naar links (met kans $\frac{1}{4}$), 1 eenheid naar boven (met kans $\frac{1}{4}$) of 1 eenheid naar onder (met kans $\frac{1}{4}$).



Voor $n = 1, 2, \cdots$ noteren we u_n als de kans dat de n-de stap de terugkeer naar de oorsprong realiseert. Een stap naar rechts kunnen we noteren met $(1,0)$, een stap naar links met $(-1,0)$, een stap naar boven door $(0,1)$ en een stap naar onder door $(0,-1)$. Een pad van n stappen kan dus bekeken worden als een keten van n symbolen $(\pm 1, 0)$ of $(0, \pm 1)$. Zo is bijvoorbeeld $((0,1), (-1,0), (0,1), (1,0), (1,0))$ een pad van 5 stappen die ons brengt van de oorsprong naar positie $(1,2)$.

3.2 Terugkeer naar de oorsprong in n stappen

Stelling 3.1. *Een oneven aantal stappen brengt ons nooit terug naar de oorsprong.*

Bewijs. Om de eindpositie te kennen van het deeltje moeten we alle symbolen $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ van het pad bij elkaar optellen. Om als resultaat $(0,0)$ te krijgen moeten er, zowel in d eeerste als de tweede coördinaat, evenveel symbolen $+1$ zijn als symbolen -1. Maar dan bevat het pad steeds een even aantal stappen. $\square$

Gevolg 3.2. *Er geldt dus :* $u_{2n+1} = 0$

Stelling 3.3. *De kans om in $2n$ stappen terug te keren naar de oorsprong is*

$$u_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2$$

Bewijs. Aangezien elk pad met $2n$ stappen dezelfde kans heeft, komt het berekenen van u_{2n} neer op het berekenen van de verhouding van het aantal "gunstige"paden tot het totaal aantal "mogelijke "paden. Bij elke stap heb je 4 keuzemogelijkheden dus het totaal aantal mogelijkheden is 4^{2n}. Een gunstig pad heeft k stappen van de vorm $(1,0)$ en k stappen van de vorm $(-1,0)$. Maar ook $n-k$ stappen van de vorm $(0,1)$ en $n-k$ stappen van de vorm $(0,-1)$. Hierbij mag $k = 0,1,2,\cdots,n$ zijn. Dit is het aantal herhalingspermutaties van $2n$ symbolen waarvan er k van het ene type, k van het andere type, $n-k$ van nog een nader typen en tenslotte $n-k$ van een vierde type zijn. Het totaal aantal gunstige paden is dus gelijk aan $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!}.\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Nu weten we dat $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = 2nn$, zodat het aantal gunstige mogelijkheden gelijk is aan $\binom{2n}{n}^2$. Hieruit volgt, volgens de formule van Laplace, dan het gestelde. $\square$

Berekenen we even een paar mogelijkheden:

n	u_{2n}
1	$0,25$
2	$0,1406$
3	$0,0976$
4	$0,0748$
5	$0,0605$

3.3 Is er ooit een terugkeer naar de oorsprong?

Stelling 3.4. *De kans om terug te keren naar de oorsprong in het tweedimensionale geval is* 100%*.*

Bewijs. Net zoals in het 1-dimensionale geval, moeten we enkel nagaan of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ convergent of divergent is. De formule van Stirling zegt ons dat $n! \sim n^{n+0,5}e^{-n}\sqrt{2\pi}$. Hieruit volgt dat $u_{2n} \sim \dfrac{1}{\pi n}$. Omdat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergeert zal ook de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ divergeren. Hieruit volgt het gestelde.

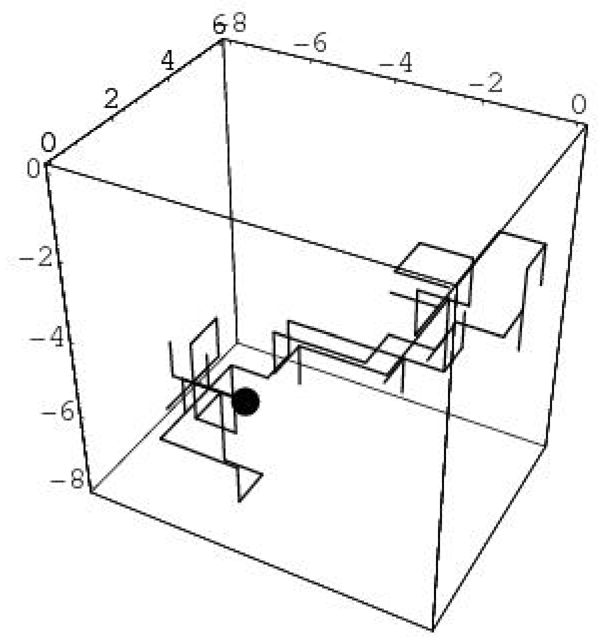
□

Hoofdstuk 4

Drie dimensionele wandelingen

4.1 Afspraken

Op tijdstip $t = 0$ bevindt het deeltje zich in $(0, 0, 0)$. Op elk tijdstip $t = 0, 1, 2, \cdots$ springt het deeltje ofwel 1 eenheid naar rechts (met kans $\frac{1}{6}$) , 1 eenheid naar links (met kans $\frac{1}{6}$), 1 eenheid naar boven (met kans $\frac{1}{6}$) of 1 eenheid naar onder (met kans $\frac{1}{6}$), 1 eenheid naar voor (met kans $\frac{1}{6}$) of 1 eenheid naar achter (met kans $\frac{1}{6}$).



Voor $n = 1, 2, \cdots$ noteren we u_n als de kans dat de n-de stap de terugkeer naar de oorsprong realiseert.De stappen kunnen we noteren met $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$,

$(0, 0, \pm 1)$. Een pad van n stappen kan dus bekeken worden als een keten van n dergelijke symbolen.

4.2 Terugkeer naar de oorsprong in n stappen

Analoog aan de ééndimensionale en tweedimensionale wandelingen vinden we:

Stelling 4.1. *Een oneven aantal stappen brengt ons nooit terug naar de oorsprong.*

Gevolg 4.2. *Er geldt dus :* $u_{2n+1} = 0$

Stelling 4.3. *De kans om in $2n$ stappen terug te keren naar de oorsprong is*

$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k+j \leq n} \Big(\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \Big)^2$$

Bewijs. Aangezien elk pad met $2n$ stappen dezelfde kans heeft, komt het berekenen van u_{2n} neer op het berekenen van de verhouding van het aantal "gunstige"paden tot het totaal aantal "mogelijke "paden. Bij elke stap heb je 6 keuzemogelijkheden dus het totaal aantal mogelijkheden is 6^{2n}. Een gunstig pad heeft k stappen van de vorm $(1, 0, 0)$ en k stappen van de vorm $(-1, 0, 0)$. Maar ook j stappen van de vorm $(0, 1, 0)$ en j stappen van de vorm $(0, -1, 0)$. En tenslotte ook $n - k - j$ stappen van de vorm $(0, 0, 1)$ en $n - k - j$ stappen van de vorm $(0, 0, -1)$. Hierbij mag $k, j = 0, 1, 2, \cdots, n$ zijn en moet $k + j \leq n$ zijn. Het totaal aantal gunstige paden is dus gelijk aan $\sum_{k+j \leq n} \frac{(2n)!}{k!k!j!j!(n-k-j)!(n-k-j)!} = \sum_{k+j \leq n} \frac{(2n)!}{n!n!} . \Big(\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \Big)^2$. Hieruit volgt, volgens de formule van Laplace, dan het gestelde. □

4.3 Is er ooit een terugkeer naar de oorsprong?

Men kan aantonen dat $u_{2n} \sim$ (constante) $\dfrac{1}{n^{1,5}}$ en dus dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ convergeert naar een waarde $\approx 0,53$. De kans om ooit terug te keren naar de oorsprong is dan $\approx \dfrac{0,53}{1+0,53} \approx 0,34$. Vandaar:

Stelling 4.4. *De kans om terug te keren naar de oorsprong in het driedimensionale geval is* $\approx 34\%$.

Deze stelling werd voor het eerst besproken door G. Polya en verklaart de uitspraak : *a drunken man will always come home, but a drunken bird never will.*. De dronken man beweegt zich in twee dimensies en de vogel in drie.