Hoofdstuk 11

Eenheden van $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$

11.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2)$

Stel $C_2 \times C_2 \times C_2 = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\} = \{a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = 1\}$. Definieer vervolgens $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2) = \{a_0 + a_1 a + \cdots + a_7 abc : a_i \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2), +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra.}$$

$C_2 \times C_2 \times C_2$ is een abelse groep met acht toevoegingsklassen en dus acht irreducibele representaties van graad 1:

$$\begin{array}{l}
\rho_1 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto 1 \text{ en } b \mapsto 1 \text{ en } c \mapsto 1 \\
\rho_2 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto 1 \text{ en } b \mapsto 1 \text{ en } c \mapsto -1 \\
\rho_3 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto 1 \text{ en } b \mapsto -1 \text{ en } c \mapsto 1 \\
\rho_4 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto 1 \text{ en } b \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto -1 \\
\rho_5 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto 1 \text{ en } c \mapsto 1 \\
\rho_6 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto 1 \text{ en } c \mapsto -1 \\
\rho_7 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto -1 \text{ en } c \mapsto 1 \\
\rho_8 : C_2 \times C_2 \times C_2 \to \mathbb{Q} : a \mapsto -1 \text{ en } b \mapsto -1 \text{ en } c \mapsto -1
\end{array}$$

We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2)$. Noteer $x = a_0 + a_1 a + \cdots + a_7 abc$, dan is:

$$\begin{array}{l}
\rho_1(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\
\rho_2(x) = a_0 + a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - a_7 \\
\rho_3(x) = a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7 \\
\rho_4(x) = a_0 + a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + a_6 + a_7 \\
\rho_5(x) = a_0 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7 \\
\rho_6(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 \\
\rho_7(x) = a_0 - a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 \\
\rho_8(x) = a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - a_7
\end{array}$$

We definiëren tenslotte: $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8)$ via

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

Het is duidelijk dat:

Stelling 11.1. $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2) \cong \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}}_{8 \text{ keer}}$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

11.2 De groepsring $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$

Noteer $8.\mathbb{Q} = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}}_{8 \text{ keer}}$. Dan is $8.\mathbb{Z}$ de ring der gehelen van $8.\mathbb{Q}$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ noteren we met H. Uiteraard is $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ een deel van H omdat elk element van $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ afgebeeld wordt op een element van $8.\mathbb{Z}$. Dus $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2) \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $x = \frac{1}{8}(1+a+b+c+ab+ac+bc)$ een geheel van $\mathbb{Q}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ omdat $x^2 - x = 0$ en toch is x geen element van $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$. Bijgevolg komt $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ slechts overeen met een deel van $8.\mathbb{Z}$.

Stelling 11.2. $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2) \cong \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in 8.\mathbb{Z} : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \equiv 0 \ mod\ 8, x_1 \equiv -x_3 - x_5 - x_7 \ mod\ 4, x_2 \equiv -x_3 - x_6 - x_7 \ mod\ , x_4 \equiv x_5 + x_6 - x_7 \ mod\ 4$ *en* $x_3 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv x_7 \ mod\ 2$

Bewijs. Stel $\rho(\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)) = A$. Nu is: $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in A$

$$\iff \exists a_0, \cdots, a_7 \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a_0, \cdots, a_7 \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \equiv 0 \bmod 8 \\ x_1 \equiv -x_3 - x_5 - x_7 \bmod 4 \\ x_2 \equiv -x_3 - x_6 - x_7 \bmod \\ x_4 \equiv x_5 + x_6 - x_7 \bmod 4 \\ x_3 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv x_7 \bmod 2 \end{cases}$$

□

11.3 Eenheden in $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$

Stelling 11.3. *Alle eenheden van $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ zijn triviaal of $U(\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)) = \pm C_2 \times C_2 \times C_2$*

Bewijs. We bepalen eerst de eenheden van $8.\mathbb{Z}$. Nu geldt dat $U(8.\mathbb{Z} = 8.U(\mathbb{Z})$ en $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. In het totaal hebben we 256 eenheden. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten. We kiezen x_3, x_5, x_6 en x_7 gelijk aan 1 of -1. Gebruik makend van de voorwaarden uit vorige stelling kunnen we dan x_0, x_1, x_2 en x_4 bepalen. Omdat tegengestelde waarden voor x_3, x_5, x_6 en x_7 ook tegengestelde waarden geven voor x_0, x_1, x_2 en x_4, volstaat het 8 waarden te controleren.

x_3	x_5	w_6	x_7	x_0	x_1	x_2	x_4	eenheid
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	abc
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	$-c$
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	$-ab$
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	$-b$
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$-ac$
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	bc
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	a

We vinden dus enkel de 16 triviale eenheden.

$\square$

Er zijn dus 240 elementen van $8.\mathbb{Z}$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2))$. Zo komt met $(1,1,1,1,1,1,1,-1))$ het element $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}ac - \frac{1}{4}bc + \frac{1}{4}abc$ overeen. Dit zijn elementen van H die niet in $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ zitten.