Inversie

Hector Mommaerts

Hoofdstuk 1

Definities en constructies

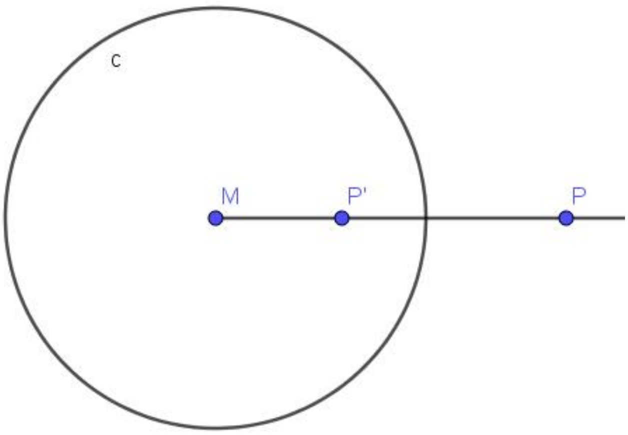
1.1 Definitie

We weten hoe we een punt moeten spiegelen rond een rechte. We gaan nu kijken hoe we een punt spiegelen rond een cirkel.

Definitie 1.1. Gegeven een cirkel c met middelpunt M en straal r. Het inversiebeeld van een punt P is het punt P' op de halfrechte $[MP$ zodat

$$|MP|.|MP'| = r^2$$

We noemen c de *inversie cirkel* , M het *inversie centrum* en r^2 de *macht van de inversie*. De punten P en P' noemen we elkaars *spiegelbeeld of inversie beeld* ten opzichte van de cirkel c.



Definitie 1.2. De afbeelding die elk punt van het vlak, behalve het middelpunt M van de cirkel c, afbeeldt op zijn inversie beeld noemen we de inversie, cirkelspiegeling of spiegeling in de cirkel c. We noteren : I_c.

Enkele opmerkingen:

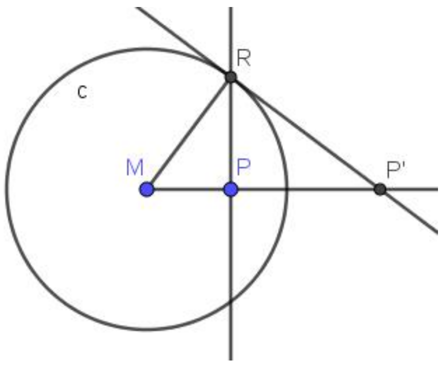
- Alle punten op de cirkel c zijn dekpunten van de inversie afbeelding I_c. De cirkel c is *puntsgewijs invariant* onder de cirkelspiegeling in c. Met andere woorden $\forall X \in c : I_c(X) = X$ en $I_c(c) = c$.

- Een punt buiten de inversie cirkel wordt afgebeeld binnen de cirkel en omgekeerd. Het binnengebied en het buitengebied van de cirkel c worden omgewisseld door een inversie.

- De inversie afbeelding I_c is involutorisch: $\forall X \in \pi, X \neq M : I_c^2(X) = X$

1.2 Constructies

Eerst kiezen we een punt P binnen de inversiecirkel en construeren het inversie beeld P'.



- Teken de halfrechte $[MP$.

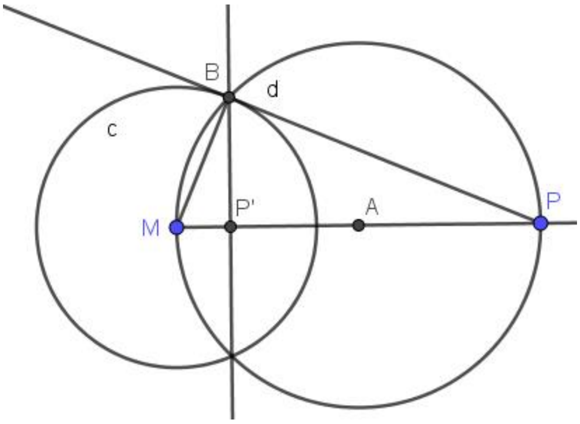
- Teken de loodlijn in P op $[MP$. Noem het snijpunt met de cirkel R.

- Teken in R de loodlijn op de straal $[MR]$.

- Het snijpunt van die loodlijn met $[MP$ is het gevraagde punt P'.

- De driehoeken MPR en MRP' zijn gelijkvormig (gelijke hoeken). Hieruit volgt dat $\dfrac{|MP|}{|MR|} = \dfrac{|MR|}{|MP'|}$ En dus is $|MP|.|MP'| = r^2$. Bijgevolg is P' het inversie beeld van P.

Nu nemen we een punt P buiten de inversiecirkel. we willen de constructie in omgekeerde richting uitvoeren . We moeten dus een raaklijn uit P aan de cirkel tekenen.



- Teken een cirkel d met $[MP]$ als middellijn.
- Noem het snijpunt van de crkels c en d het punt B. Teken in B de loodlijn op $[MP$. Het snijpunt van die loodlijn met $[MP$is het gevraagde punt P'.
- De driehoek MBP is rechthoekig (omtrekshoek op een halve cirkel in d). Analoog aan de vorige constructie is $|MP|.|MP'| = r^2$. Bijgevolg is P' het inversie beeld van P.

Hoofdstuk 2

Inversiebeeld van een rechte

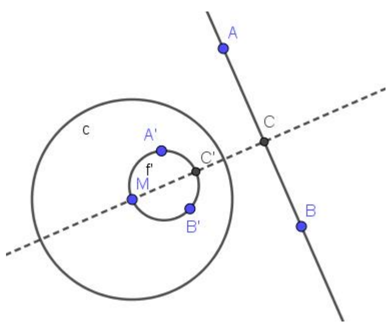
2.1 De rechte gaat door het inversiecentrum

Stelling 2.1. *Het inversie beeld van een rechte door het inversie centrum is de rechte zelf.*

Bewijs. Met rechte bedoelen we hier de rechte zonder het inversiecentrum M. Volgens de definitie wordt elk punt op de rechte afgebeeld op een punt van dezelfde rechte en omgekeerd elk punt op de rechte is het inversie beeld van een punt op de rechte. □

Rechten door het inversiecentrum zijn dus invarianten ten opzichte van de cirkelspiegeling.

2.2 De rechte gaat niet door het inversiecentrum



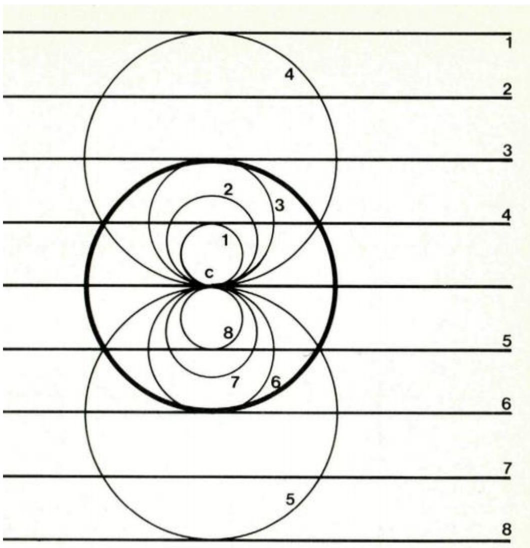
Stelling 2.2. *Het inversie beeld van een rechte die niet door het inversie centrum gaat is een cirkel door het inversiecentrum.*

Bewijs. Teken de loodlijn uit M op de rechte AB die AB snijdt in C. Noteer met A' en C' de inversie beelden van A en C. Omdat $|MA||MA'| = |MC||MC'|$ zal $\dfrac{|MA'|}{|MC|}\dfrac{|MC'|}{|MA|}$. Dus zijn de driehoeken MAC en $MA'C'$ gelijkvormig en is $\widehat{MA'C'} = 90°$. Analoog zal ook $\widehat{MB'C'} = 90°$.Bijgevolg liggen de punten A' en B' op een cirkel met middellijn MC'. Hieruit volgt het gestelde. □

Uit het bewijs leiden we af dat het inversie beeld van een rechte, die niet door het inversiecentrum gaat, een cirkel is die door het inversiecentrum gaat en waarvan het middelpunt gelegen is op de loodlijn uit het inversie centrum op de gegeven rechte.

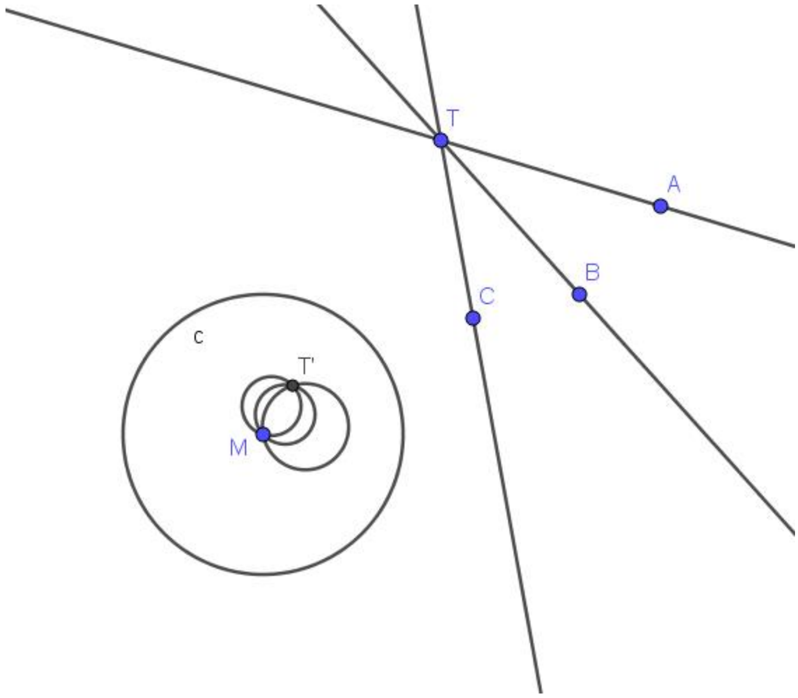
2.3 Evenwijdige rechten

Als we dan een aantal evenwijdige rechten nemen dan zal het inversie beeld ofwel de ,rechte zelf zijn ofwel allemaal cirkels die elkaar raken in het inversiecentrum en waarvan alle middelpunten liggen op de loodlijn door het inversiecentrum op de richting van de gegeven rechten.



2.4 Een stralenbundel

Nemen we alle rechten door een bepaald punt T, dan is het inversie beeld een verzameling van cirkels door het inversiecentrum en door het inversiebeeld van T.



Omdat de middellijn van het inversiebeeld van een rechte door M loodrecht staat op de rechte zelf is het duidelijk dat de hoek tussen twee rechten gelijk is aan de hoek tussen de twee inversiebeelden. De hoek tussen twee cirkels is hoek gevormd door de raaklijnen in een snijpunt. Met andere woorden: *een hoek is rechten is invariant bij een cirkelspiegeling* .

Hoofdstuk 3

Het inversiebeeld van een cirkel

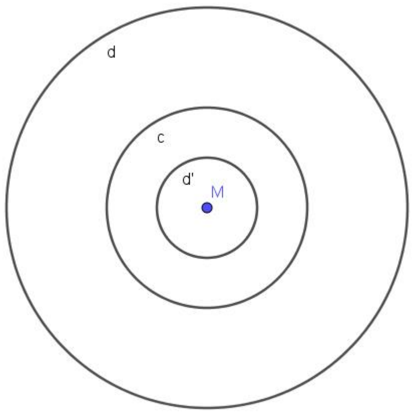
3.1 De cirkel gaat door het inversiecentrum

Stelling 3.1. *Het inversie beeld van een cirkel door het inversie centrum is een rechte .*

Bewijs. Uit het involutief zijn van de inversie en stelling 2.2 volgt het gestelde. □

3.2 De cirkel gaat niet door het inversiecentrum

We bestuderen eerst het speciaal geval als het middelpunt van de cirkel d samenvalt met het inversiecentrum.

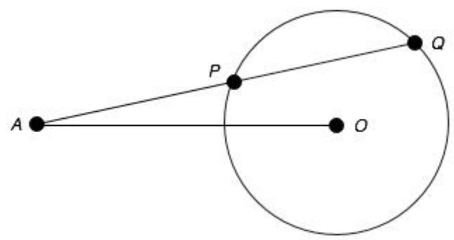


Stelling 3.2. *Het inversie beeld van een cirkel d met als middelpunt het inversie centrum is opnieuw een cirkel met als middelpunt het inversie centrum .*

Bewijs. Omdat alle punten van d op een zelfde afstand van M gelegen zijn , zullen alle inversie beelden ook op een zelfde afstand van M gelegen zijn en dus op een cirkel liggen met als middelpunt het inversie centrum M. $\square$

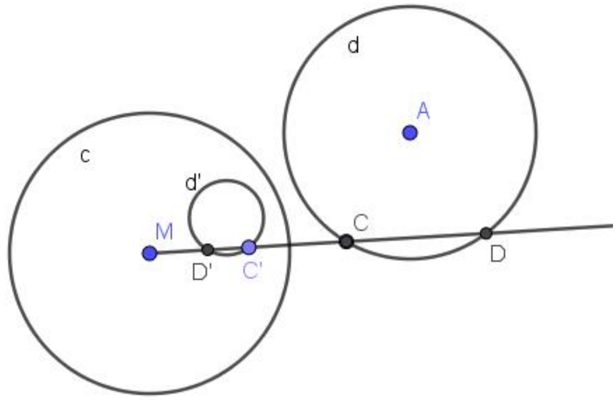
Definieren we eerst de *macht m van een punt A ten opzichte van een cirkel met straal r en middelpunt O* . Neem een willekeurige rechte door A die de cirkel snijdt in twee punten P en Q.

$$m = |AP|.|AQ| = |AO|^2 - r^2$$



We nemen nu de algemene situatie.

Stelling 3.3. *Het inversie beeld van een cirkel d, die niet door het inversiecentrum gaat, is een cirkel die het beeld is van d onder een homothetie met centrum het inversiecentrum en als fector $\frac{r^2}{m}$, waarbij m de macht is van het inversiecentrum ten opzichte van d.*



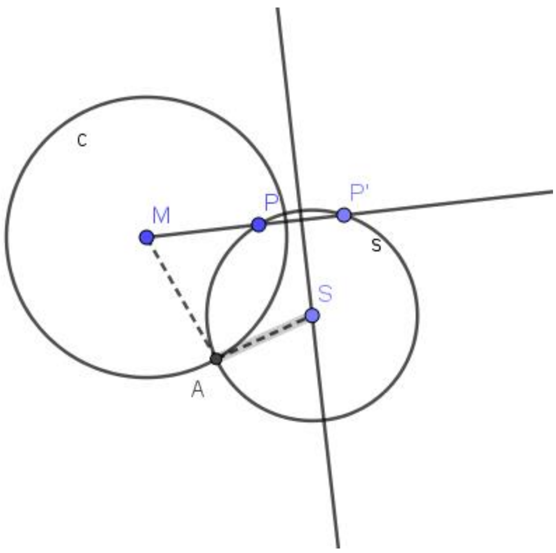
Bewijs. Neem een halfrechte door M die d snijdt in de punten C en D. De inversie beelden van C en D zijn respectievelijk C' en D'. Dus $|MC|.|MC'| = |MD|.|MD'| = r^2$. Hieruit kan je afleden dat $|MC'| = \dfrac{|MD|.|MD'|}{|MC|}$ en $|MD'| = \dfrac{|MC|.|MC'|}{|MD|}$. Verder geldt ook dat: $\dfrac{|MD'|}{|MC|} = \dfrac{|MC'|}{|MD|} = \dfrac{|MD'|}{|MC|}.\dfrac{|MD|}{|MD|} = \dfrac{r^2}{m}$. Je moet dus D met dezelfde factor vermenigvuldigen, vanuit M , om C' te krijgen als je C moet vermenigvuldigen om D' te krijgen. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

Hoofdstuk 4

Andere eigenschappen

4.1 Invarianten

We onderzoeken welke figuren er invariant zijn onder een inversie in c. We weten al dat de inversiecirkel puntsgewijs invariant is en dat rechten door het inversiecentrum ook invariant zijn. Zijn er nog andere cirkels invariant onder een cirkelspiegeling?



Stelling 4.1. *Als een cirkel s orthogonaal is met de inversiecirkel c dan is s invariant onder I_c, en omgekeerd.*

Bewijs.

- Als c en s orthogonale cirkels zijn, dan is $MA \perp AS$. Dus is MA een raaklijn aan cirkel s. Er geldt dat $|MP|.|MP'| = |MA|^2$ (macht van M ten opzichte van de cirkel s). Maar $|MA| = r$, dus is $|MP|.|MP'| = r^2$ en zijn P en P' elkaars spiegelbeeld ten opzichte van c. Bijgevolg is $I_c(s) = s$.

- Als $I_c(s) = s$ is $|MP|.|MP'| = r^2$ en dus is MA een raaklijn aan cirkel s en zijn c en s orthogonale cirkels.

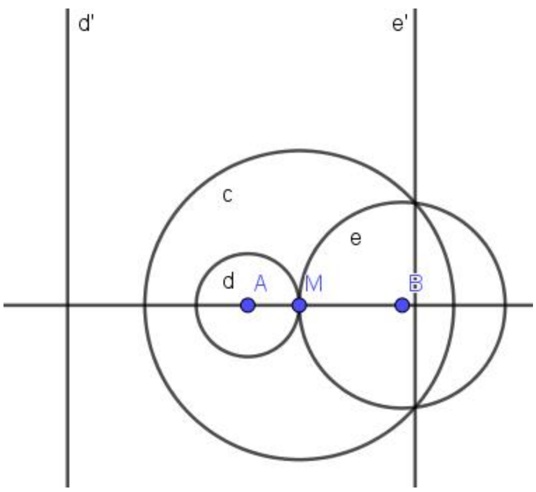
□

Bij orthogonale cirkels blijft de hoek tussen de cirkels dus behouden. In volgend deel zul je zien dat bij rakende cirkels (een hoek van 0°) de hoek ook bewaard blijft onder inversie. Deze eigenschap kan gemakkelijk veralgemeend worden tot de hoek tussen twee snijdende cirkels. ook die blijft bewaard onder inversie.

4.2 Inversiebeelden van rakende cirkels

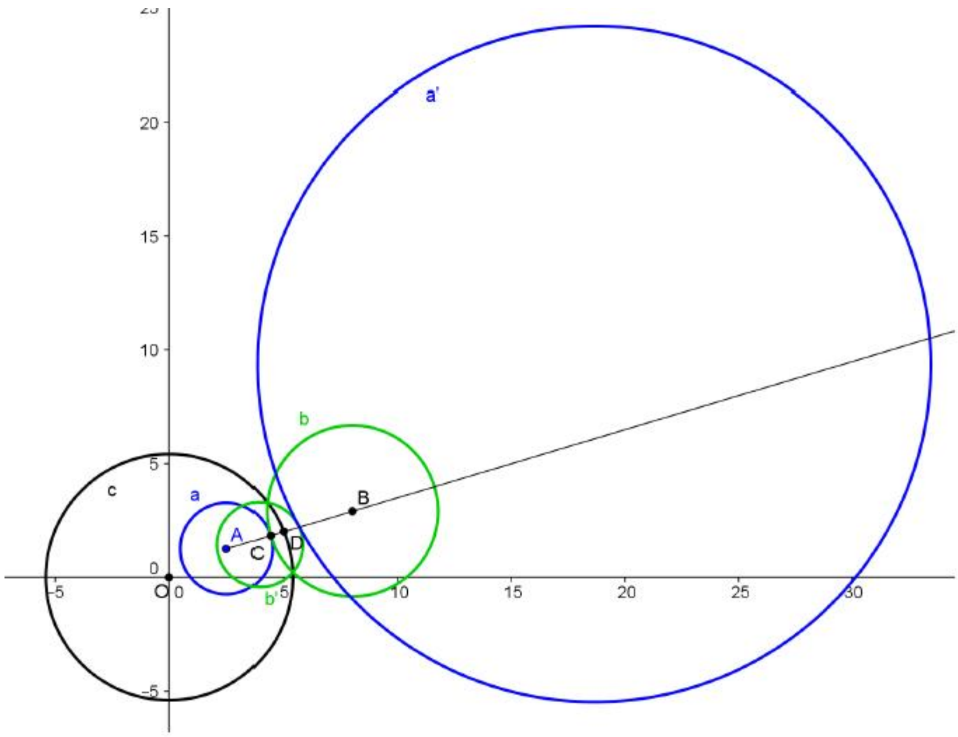
4.2.1 Ze raken in het inversiecentrum

Het inversiebeeld van twee cirkels die elkaar raken in het inversiecenrum zijn twee evenwijdige rechten, die loodrecht staat op de rechte door het inversiecentrum en de middelpunten van de twee gegeven cirkels.



4.2.2 Ze raken niet in het inversiecentrum

Het inversiebeeld van twee cirkels die elkaar raken, maar niet in het inversiecenrum, zijn terug twee rakende cirkels. Het rakend zijn van cirkels is dus een invariante eigenschap.

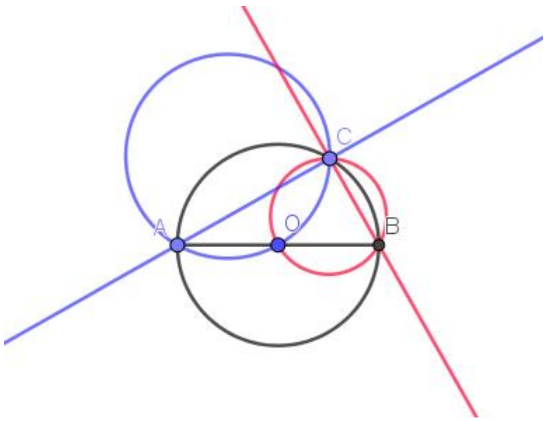


Hoofdstuk 5

Toepassingen

Het kiezen van een bepaalde inversie kan dikwijls het bewijs van een stelling of een constructie vereenvoudigen.

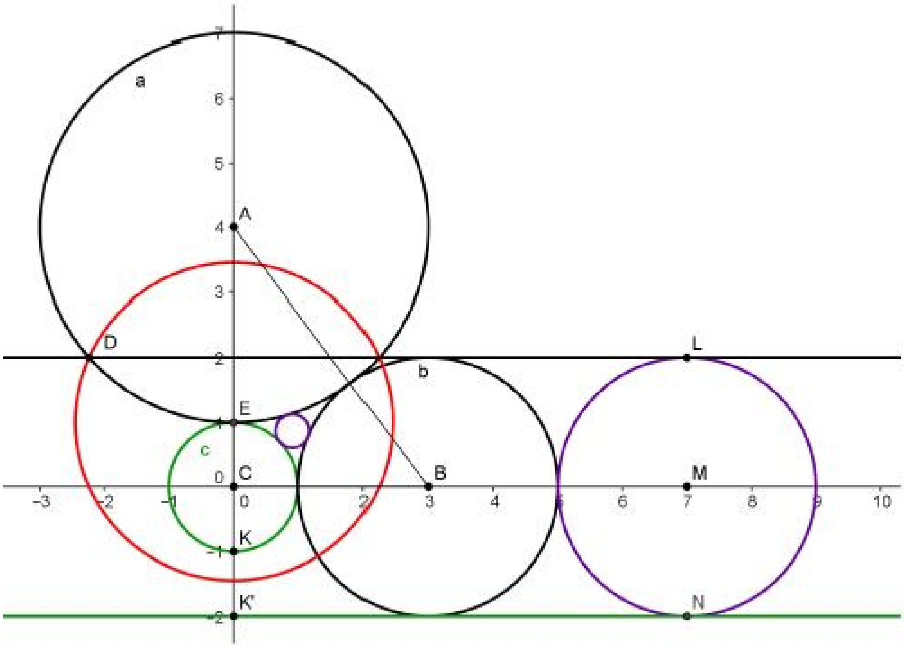
5.1 Voorbeeld 1



Stelling 5.1. *Gegeven is een cirkel met middelpunt O en middellijn AB. Neem een willekeurig punt C, verschillend van A en B, op de cirkel. Bewijs dat de cirkel door A, O en C orthogonaal is met de cirkel door B, O en C.*

Bewijs. Kunnen we een inversie kiezen zo dat de bewering te herleiden valt tot een gekend resultaat of tot een eenvoudigere stelling? We gaan ervoor zorgen dat de twee cirkels (de blauwe cirkel door A, O, C en de rode cirkel door B, O, C) getransformeerd worden in rechten. Neem de gegeven cirkel als inversiecirkel. De blauwe cirkel wordt afgebeeld op AC en de rode cirkel op BC. Omdat een omtrekshoek op een halve cirkel recht is, zal $AB \perp BC$. Omdat loodrechtheid behouden blijft onder inversie, zullen de blauwe en rode cirkel orthogonaal zijn. □

5.2 Voorbeeld 2



> **Stelling 5.2.** *Gegeven zijn drie cirkels die elkaar twee aan twee uitwendig raken.Zoek een cirkel die raakt aan de drie cirkels.*

Bewijs. Neem E, het raakpunt van a en c als inversiecentrum. Dan worden de cirkels a en c getransformeerd in twee evenwijdige rechten. De derde cirkel b wordt dan afgebeeld op een cirkel die raakt aan die twee evenwijdige rechten. Kies de straal van de inversiecirkel zo dat b invariant is. Het probleem is nu een cirkel te tekenen die raakt aan de twee evenwijdige rechten en aan b. Dit is de paarse cirkel. Het inversiebeeld hiervan is het antwoord. □