Hoofdstuk 12

Eenheden van $\mathbb{Z}Q_8$

12.1 De groepsalgebra $\mathbb{Q}Q_8$

Stel $Q_8 = \{x, y : x^4 = 1, x^2 = y^2 \text{ en } y^{-1}xy = x^{-1}\}$ de quaternionengroep van orde 8. Definieer dan $\mathbb{Q}Q_8 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4y + a_5xy + a_6x^2y + a_7x^3y : a_i \in \mathbb{Q}\}$

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}Q_8, +, . \text{ is een } \mathbb{Q}\text{-algebra}$$

Q_8 is een niet-abelse groep met vijf toevoegingsklassen en dus vijf irreducibele representaties: vier van graad 1 en eentje van graad 2 want $8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$:

$$\begin{array}{l}
\rho_1 : Q_8 \to \mathbb{Q} : x \mapsto 1 \text{ en } y \mapsto 1 \\
\rho_2 : Q_8 \to \mathbb{Q} : x \mapsto 1 \text{ en } y \mapsto -1 \\
\rho_3 : Q_8 \to \mathbb{Q} : x \mapsto -1 \text{ en } y \mapsto 1 \\
\rho_4 : Q_8 \to \mathbb{Q} : x \mapsto -1 \text{ en } y \mapsto -1 \\
\rho_4 : Q_8 \to \mathbb{H}(\mathbb{Q}) : x \mapsto i \text{ en } y \mapsto j
\end{array}$$

We kunnen die representaties lineair uitbreiden tot $\mathbb{Q}Q_8$. Noteer $x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4y + a_5xy + a_6x^2y + a_7x^3y$, dan is

$$\begin{array}{l}
\rho_1(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\
\rho_2(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 \\
\rho_3(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 \\
\rho_4(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 \\
\rho_5(x) = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)i + (a_4 - a_6)j + (a_5 - a_7)k
\end{array}$$

De matrix van deze lineaire afbeelding is dan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat:

Stelling 12.1. $\mathbb{Q}Q_8 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Q})$ *als* $\mathbb{Q}$*-algebra*

12.2 De groepsring $\mathbb{Z}Q_8$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ is de ring der gehelen van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Q})$. De ring der gehelen van $\mathbb{Q}Q_8$ noteren we met H. Uiteraard is $\mathbb{Z}Q_8$ een deel van H omdat elk element van $\mathbb{Z}Q_8$ afgebeeld wordt op een element van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})$. Dus $\mathbb{Z}Q_8 \subset H$. Er zijn echter ook elementen van H die niet in $\mathbb{Z}Q_8$ zitten. Zo is bijvoorbeeld $z = \frac{1}{4}(1 + x + x^2 + x^3)$ een geheel van $\mathbb{Q}Q_8$ omdat $z^2 - z = 0$ en toch is z geen element van $\mathbb{Z}Q_8$. Bijgevolg komt $\mathbb{Z}Q_8$ slechts overeen met een deel van $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})$.

Stelling 12.2. $\mathbb{Z}Q_8 \cong \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : x_0 \equiv -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4$ *mod* 8 *en* $x_1 \equiv -x_3 + 2x_4 + 2x_6$ *mod* 4 *en* $x_2 \equiv x_3 + 2x_6 + 2x_7$ *mod* 4 *en* $x_3 \equiv x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ *mod* 2

Bewijs. Stel $\rho(\mathbb{Z}Q_8) = A$. Nu is: $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k) \in A$

$$\iff \exists a, \cdots, h \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, \cdots, h \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 \equiv -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \bmod 8 \\ x_1 \equiv -x_3 + 2x_4 + 2x_6 \bmod 4 \\ x_2 \equiv x_3 + 2x_6 + 2x_7 \bmod 4 \\ x_3 \equiv x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \bmod 2 \end{cases}$$

□

12.3 Eenheden in $\mathbb{Z}(Q_8)$

Stelling 12.3. *Alle eenheden van $\mathbb{Z}(Q_8)$ zijn triviaal of $U(\mathbb{Z}(Q_8)) = \pm Q_8$*

Bewijs. We bepalen eerst de eenheden van $4.\mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})$. Nu geldt dat $U(4.\mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})) = 4.U(\mathbb{Z}) \oplus U(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$. Nu is $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ en $U(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. In het totaal hebben we 128 eenheden. Onderzoeken we nu welke van deze eenheden in A zitten. We kunnen x_4, x_5, x_6 en x_7 kiezen. Voor x_3 zullen we altijd twee mogelijkheden hebben ± 1. We berekenen enkel voor $x_3 = 1$. De andere waarde geeft de tegensgestelde oplossing. Gebruik makend van de voorwaarden uit vorige stelling kunnen we dan x_0, x_1, x_2 en x_3 bepalen.

x_4	x_5	x_6	x_7	x_0	x_1	x_2	x_3	eenheid
1	0	0	0	1	1	1	1	1
-1	0	0	0	1	1	1	1	x^2
0	1	0	0	1	1	-1	-1	x
0	-1	0	0	1	1	-1	-1	x^3
0	0	1	0	1	-1	1	-1	y
0	0	-1	0	1	-1	1	-1	x^2y
0	0	0	1	1	-1	-1	1	xy
0	0	0	-1	1	-1	-1	1	x^3y

We vinden dus enkel de 16 triviale eenheden.

$\square$

Er zijn dus 112 elementen van $4.\mathbb{Z} \oplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ die niet overeenkomen met eenheden in $U(\mathbb{Z}(Q_8))$. Zo komt met $(1,1,1,1,0,0,0,1))$ het element $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{4}x^3y$ overeen. Dit zijn elementen van H die niet in $\mathbb{Z}(Q_8)$ zitten.