Congruentie deelgroepen

Definities

Congruentie deelgroepen zijn deelgroepen van matrixgroepen met gehele elementen, die bepaald worden door congruentie relaties. De eenvoudigste omgeving om die congruentie groepen te bestuderen is $\Gamma = Sl_2(\mathbb{Z})$. Voor $n \geq 1$, definieren we $\pi_n : Sl_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow Sl_2(\mathbb{Z}_{\ltimes}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$ mod n.

Definitie 0.1. De hoofdcongruentie deelgroep van niveau n, genoteerd als $\Gamma(n)$, is de kern van de afbeelding π_n. Met andere woorden:

$$\Gamma(n) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) : a - 1 \equiv d - 1 \equiv b \equiv 0 \text{ mod } n\}$$

Definitie 0.2. Een congruentie deelgroep van Γ is een deelgroep H van Γ zodat er een $n \geq 1$ bestaat waarvoor $\Gamma(n) \subset H$. De kleinste waarde van n waarvoor dit geldt, noemt men het niveau van H.

Zo is bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$, want $\pi_2\Big(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Een paar voorebeelden van congruentie deelgroepen:

- De deelgroepen $\Gamma_0(n)$, ook de Hecke congruentie deelgroepen genoemd, zijn het inverse beeld onder π_n van de bovendriehoeksmatrices in $Sl_2(\mathbb{Z}_n)$. Met andere woorden:

$$\Gamma_0(n) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \text{ mod } n\}$$

- De deelgroepen $\Gamma_1(n)$ zijn het inverse beeld onder π_n van de unipotente matrices in $Sl_2(\mathbb{Z}_n)$. Met andere woorden:

$$\Gamma_1(n) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) : a, d \equiv 1 \text{ mod } n, c \equiv 0 \text{ mod } n\}$$

- De deelgroepen Λ zijn het inverse beeld onder π_n van de cyclische groep voortgebracht door $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $Sl_2(\mathbb{Z}_n)$. Met andere woorden:

$$\Lambda = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) : ac \equiv 0 \text{ mod } n, bd \equiv 0 \text{ mod } n\}$$

Eigenschappen

1. $\Gamma(n)$ is als kern van een groupshomomorfisme een normaaldeler van Γ.

2. De afbeelding π_n is surjectief. Bijgevolg is de rij $1 \longrightarrow \Gamma(n) \longrightarrow \Gamma = Sl_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow Sl_2(\mathbb{Z}_n) \longrightarrow 1$ exact en geldt

$$\frac{\Gamma}{\Gamma(n)} \cong Sl_2(\mathbb{Z}_n)$$

3. $\Gamma(n)$ heeft eindige index in Γ. De index is gelijk aan de orde van de groep $Sl_2(\mathbb{Z}_n)$ en wordt gegeven door de formule

$$[\Gamma : \Gamma(n)] = n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

   waarbij p de verzameling priemdelers van n doorloopt.

4. Voor $n \geq 3$ is $\Gamma(n)$ torsievrij.

5. Congruentie deelgroepen hebben altijd een eindige index in Γ.

6. De congruentie deelgroepen van niveau n staan in bijectief verband met de deelgroepen van $Sl_2(\mathbb{Z}_n)$.

7. De index van de Hecke congruentie deelgroepen wordt gegeven door :

$$[\Gamma : \Gamma_0(n)] = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

8. De index van de deelgroepen $\Gamma_1(n)$ wordt gegeven door :

$$[\Gamma : \Gamma_1(n)] = n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Niveau 2

We werken de begrippen uit voor $n = 2$.

- De groep $\Gamma = Sl_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$. Deze groep bestaat immers uit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  We kunnen deze matrices respectievelijk identificeren met de elementen $1, \epsilon, \epsilon\rho, \epsilon\rho^2, \rho, \rho^2$ van S_3.

- De hoofdcongruentie deelgroep $\Gamma(2)$ heeft index 6 in $Sl_2(\mathbb{Z})$.

- De congruentie deelgroepen $\Gamma_0(2)$ en $\Gamma_1(2)$ vallen samen. Als c even is en omdat de determinant gelijk moet zijn aan 1, zullen a en d allebei oneven moeten zijn.

- $\Gamma(2)$ is een deelgroep van $\Gamma_0(2)$. De index van $\Gamma(2)$ is 2 en dus kunnen we schrijven dat $\Gamma_0(2) = \Gamma(2) \cup \epsilon\rho^2\Gamma(2)$.

- De index van $\Gamma_0(2)$ in $Sl_2(\mathbb{Z})$ is gelijk aan 3. De nevenklassen vertegenwoordigers zijn: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Met andere woorden: $Sl_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \cup \epsilon\Gamma_0(2) \cup \epsilon\rho\Gamma_0(2)$

- $\Gamma(2)$ is een deelgroep van Λ. De index van $\Gamma(2)$ is 2 en dus kunnen we schrijven dat $\Lambda = \Gamma(2) \cup \epsilon\rho\Gamma(2)$.

- De index van Λ in $Sl_2(\mathbb{Z})$ is gelijk aan 3. De nevenklassen vertegenwoordigers zijn: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Met andere woorden: $Sl_2(\mathbb{Z}) = \Lambda \cup \epsilon\Lambda \cup \epsilon\rho^2\Lambda$

- Er is een bijectief verband tussen de deelgroepen van Γ en de congruentie deelgroepen. Nu heeft Γ 4 echte deelgroepen:$\{1, \epsilon\}, \{1, \epsilon\rho\}, \{1, \epsilon\rho^2\}$, $\{1, \rho, \rho^2\}$. Met $\{1, \epsilon\rho^2\}$ komt $\Gamma_0(2)$ overeen. Met $\{1, \epsilon\rho\}$ correspondeert de congruentie deelgroep Λ. Het inverse beeld van $\{1, \epsilon\}$ onder π_2 is een deelgroep isomorf met $\Gamma_0(2)$ maar nu met $b \equiv 0 \bmod n$ in plaats van $c \equiv 0 \bmod n$. Met $\{1, \rho, \rho^2\}$ tenslotte komt de congruentie deelgroep overeen, die gegeven wordt als :$A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) : a = d \equiv 1 \bmod 2 \text{en } b + c \equiv 0 \bmod 2 \text{ of } : b = c \equiv 1 \bmod 2 \text{en } a + d \equiv 1 \bmod 2\}$.