Aantal groepen van orde 12

We bestuderen eerst de p-Sylowdeelgroepen.

- Omdat $12 = 2^2.3$ is het aantal 2-Sylowdeelgroepen $n_2 = 1+2k$ en moet een deler zijn van 12. Dus $n_2 = 1$ of $n_2 = 3$.
- Een 2-Sylowdeelgroep is van orde 4 en dus isomorf met C_4 of $C_2 \times C_2$.
- Analoog is het aantal 3-Sylowdeelgroepen $n_3 = 1 + 3l$ en moet ook een deler zijn van 12. Dus $n_3 = 1$ of $n_3 = 4$.
- Een 3-Sylowdeelgroep is van orde 3 en dus isomorf met C_3.
- Omdat 3 en 4 onderling ondeelbaar zijn kan in de doorsnede van een 2-Sylowdeelgroep en een 3-Sylowdeelgroep enkel e zitten.
- Als A een 2-Sylowdeelgroep is en B een 3-Sylowdeelgroep, dan is $|AB| = \dfrac{|A|.|B|}{|A \cap B|} = 12$, dus in ieder geval is $G = AB$.
- We hebben dus als mogelijkheden:

n_2	n_3
1	1
1	4
3	1
3	4

- Als $n_3 = 4$ zijn er vier 3-Sylowdeelgroepen: K_1, K_2, K_3, K_4. Zij H een 2-Sylowdeelgroep. De orde van $H \cap K_i$ moet een deler zijn van 3 en 4, dus is $H \cap K_i = \{e\}$. Omdat ook $K_i \cap K_j = \{e\}$, hebben we met H en K_i reeds 12 elementen en kan er maar één 2-Sylowdeelgroep bestaan.

Uiteindelijk onderscheiden we dus 3 gevallen:

1. $n_2 = 1$ en $n_3 = 1$.
   Zowel de 2-Sylowdeelgroep als de 3-Sylowdeelgroep zijn normaal en dus krijgen we het directe product $C_4 \times C_3$ en $(C_2 \times C_2) \times C_3$.
2. $n_2 = 1$ en $n_3 = 4$.
   Enkel de 2-Sylowdeelgroep is normaal, dus moeten we met het semi-directe product werken. Noteren we de 2-Sylowdeelgroep met H. Een

3-Sylowdeelgroep noteren we met K. We gaan dus op zoek naar homomorfismen van K op $Aut(H)$. Als $H = C_4$, dan is $Aut(K) \cong C_2$ en omdat $K \cong C_3$ is er enkel het triviale homomorfisme en krijgen we terug $C_4 \times C_3$. Als echter $H = C_2 \times C_2$, dan is $Aut(H) \cong D_3$ en bestaan er wel niet-triviale homomorfismen tussen $K = \{1, g, g^2\}$ en $Aut(H) \cong \{1, a, a^2, b, ab, ab^2\}$. Neem $\varphi_1 : K \to Aut(H) : g \mapsto a$ en $\varphi_2 : K \to Aut(H) : g \mapsto a^2$. Deze twee homomorfismen zullen echter hetzelfde semidirecte product definiëren: $(C_2 \times C_2) \rtimes C_3$. Want neem $f : K \longrightarrow K : f(a) = a^2$ en $f(b) = 1$, dan is $\varphi_2 = \varphi_1 \circ f$. Omdat f een automorfisme is , zullen φ_1 en φ_2 hetzelfde semidirecte product bepalen.

3. $n_2 = 3$ en $n_3 = 1$.
Enkel de 3-Sylowdeelgroep is normaal. Noteren we de 3-Sylowdeelgroep met H. Een 2-Sylowdeelgroep noteren we met K. Dus nu moeten we op zoek naar niet-triviale homomorfismen van K naar $Aut(H) \cong C_2$. Als $K = C_4$ nemen we $\varphi : K = \{1, g, g^2, g^3\} \to Aut(H) = \{1, c\} : g \mapsto c$. Zo vinden we $C_3 \rtimes C_4$. Als $K = C_2 \times C_2$ zijn er 3 homomorfismen $\varphi_1 : K = \{1, a, b, ab\} \to Aut(H) = \{1, c\} : a \mapsto 1$ en $b \mapsto c$, $\varphi_2 : K = \{1, a, b, ab\} \to Aut(H) = \{1, c\} : a \mapsto c$ en $b \mapsto 1$ en $\varphi_3 : K = \{1, a, b, ab\} \to Aut(H) = \{1, c\} : a \mapsto c$ en $b \mapsto c$. Alle drie bepalen ze hetzelfde semidirecte product: $C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$. Want neem $f : K \longrightarrow K : f(a) = b$ en $f(b) = a$, dan is $\varphi_2 = \varphi_1 \circ f$. Neem vervolgens $f : K \longrightarrow K : f(a) = ab$ en $f(b) = b$, dan is $\varphi_3 = \varphi_1 \circ f$. Omdat in beide gevallen f een automorfisme is , zullen φ_1 , φ_2 en φ_3 hetzelfde semidirecte product bepalen.

Er zijn 5 groepen van orde 12.

De groep van type 12/1

De eerste groep die we bestuderen is $C_4 \times C_3$. Neem $H = \{1, h, h^2\}$ en $K = \{1, k, k^2, k^3\}$, dan is $G = \{1, k, k^2, k^3, h, hk, hk^2, hk^3, h^2, h^2k, h^2k^2, h^2k^3\}$. Het element hk heeft orde 12, zodoende is G de cyclische groep van orde 12 (type 12/1)

$$C_{12} = \{g : g^{12} = 1\}$$

- G is abels maar niet enkelvoudig.
- Voor elke deler d van 12 zijn er $\varphi(d)$ elementen van orde d. Er is dus 1 element van orde 2: g^6. Er zijn 2 elementen van orde 3: g^4 en g^8. Verder zijn er 2 elementen van orde 4: g^3 en g^9. Er zijn ook 2 elementen van orde 6: g^2 en g^{10}. Tenslotte zijn er 4 elementen van orde 12: g, g^5, g^7 en g^{11}.
- Voor elke deler d van 12 is er juist 1 deelgroep van orde d. Buiten de triviale deelgroepen zijn dat $A = \{1, g^6\}$ van type 2/1, $B = \{1, g^4, g^8\}$ van type 3/1, $C = \{1, g^3, g^6, g^9\}$ van type 4/1 en $D = \{1, g^2, g^4, g^6, g^8, g^{10}\}$ van type 6/1.
- We weten dat $C_{12} \cong C_4 \times C_3 \cong (C_2 \#^f C_2) \times C_3$.
- $Aut(C_{12}) \cong C_{12}^{\times} = \{1, 5, 7, 11\} \cong C_2 \times C_2 = \{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ met $\varphi_1(g) = g^5$, $\varphi_2(g) = g^7$ en $\varphi_3(g) = g^{11}$

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_{12}, +$
- de rotatiegroep van een regelmatige twaalfhoek.
- de verzameling twaalfdemachtswortels uit 1.
- $\mathbb{Z}_{26}^{\times}, . = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}, . = \langle 7 \rangle, .$
- $\mathbb{Z}_{13}^{\times}, . = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, . = \langle 2 \rangle, .$

De groep van type 12/2

De tweede groep die we bekijken is dan $(C_2 \times C_2) \times C_3$. Neem $H = \{1, h, h^2\}$ en $K = \{1, a, b, ab\}$, dan is $G = \{1, k, k^2, a, ha, h^2a, b, hb, h^2b, ab, hab, h^2ab\}$. Als we $ah = g$, dan kunnen we G ook schrijven als $G = \{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5, b, gb, g^2b, g^3b, g^4b, g^5b\}$. We krijgen de groep G van type 12/2

$$G = \{g, h : g^6 = h^2 = 1 \text{ met } gh = hg\}$$

- G is abels maar niet enkelvoudig.
- Er zijn 6 elementen van orde 6: $g, g^5, gb, g^2h, g^4h, g^5b$. Er zijn ook 2 elementen van orde 3: g^2, g^4 en 3 elementen van orde 2: g^3, b, g^3b.
- Buiten de triviale deelgroepen zijn er 3 deelgroepen van orde 2, allen van type 2/1: $\{1, g^3\}, \{1, b\}$ en $\{1, g^3b\}$. Er is 1 deelgroep van orde 3, de 3-Sylowdeelgroep, van type 3/1: $\{1, g^2, g^4\}$ en er is ook 1 deelgroep van orde 4, de 2-Sylowdeelgroep, van type 4/2: $\{1, g^3, b, g^3b\}$. Tenslotte zijn er ook 3 deelgroepen van orde 6, allen van type 6/1: $\{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}, \{1, g^2, g^4, b, g^2g, g^4b\}$ en $\{1, g^2, g^4, gb, g^b, g^5b\}$.
- G is het directe product van $\{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$ en $\{1, b\}$, dus
$$G = C_2 \times C_6 \cong (C_2 \times C_2) \times C_3$$
- De automorfismen van G moeten g afbeelden op een ander element van orde 6 en b afbeelden op een element van orde 2. Hun werking op g en b wordt gegeven in volgende tabel:

	g	b
φ_1	g	b
φ_2	g	g^3b
φ_3	g^4b	g^3
φ_4	g^4b	g^3b
φ_5	gb	g^3
φ_6	gb	b

	g	b
φ_7	g^5	b
φ_8	g^5	g^3b
φ_9	g^2b	g^3
φ_{10}	g^2b	g^3b
φ_{11}	g^5b	g^3
φ_{12}	g^5b	b

Hierbij geldt : $\varphi_2^2 = 1, \varphi_{10}^6 = 1$ en $\varphi_2\varphi_{10} = \varphi_{10}^5\varphi_2$. Dus
$$Aut(C_2 \times C_2 \times C_3) \cong D_6$$

Mogelijke realisaties:

- $\mathbb{Z}_{21}^\times, . = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}, .$
of $\mathbb{Z}_{21}^\times, . = \langle 2, 13 \text{ met } 2^6 = 1, 13^2 = 1\rangle\,, .$
- $\mathbb{Z}_{28}^\times, . = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 23, 25, 27\}, .$
of $\mathbb{Z}_{28}^\times, . = \langle 3, 13 \text{ met } 3^6 = 1, 13^2 = 1\rangle\,, .$
- $\mathbb{Z}_{36}^\times, . = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}, .$
of $\mathbb{Z}_{36}^\times, . = \langle 5, 19 \text{ met } 5^6 = 1, 19^2 = 1\rangle\,, .$
- $\mathbb{Z}_{42}^\times, . = \{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41\}, .$
of $\mathbb{Z}_{42}^\times, . = \langle 5, 13 \text{ met } 5^6 = 1, 13^2 = 1\rangle\,, .$

De groep van type 12/3

De derde groep van orde 12 is de groep $C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$. Neem $H = \{1, b, b^2\}$ de normale 3-Sylowdeelgroep en $K = \{1, a, c, ac\}$ een 2-Sylowdeelgroep. We weten dat $Aut(H) \cong C_2$. Het enige niet-identieke automorfisme van H beeldt b af op b^2. Definieer $\varphi : K \to Aut(H) : a \mapsto (\varphi_a : H \to H : b \mapsto b^2)$ en $\varphi : K \to Aut(H) : c \mapsto (\varphi_c : H \to H : b \mapsto b)$.

Dan is $G = \{1, b, b^2, a, ba, b^2a, c, bc, b^2c, ac, bac, b^2ac\}$ en $ab = (1, a)(b, 1) = (\varphi_a(b), a) = (b^2, a) = b^2a$. Analoog is $cb^2 = bc$ en $acb = b^2ac$. Wanneer we $g = bc$, zien we dat g orde 6 heeft en dat $ga = ag^5$. Zo kunnen we G identificeren met de diedergroep D_6 (type 12/3)

$$G = \{g, a : g^6 = a^2 = 1 \text{ en } ga = ag^5\}$$

- G is niet abels en niet enkelvoudig.
- Er zijn 7 toevoegingsklassen: $\{1\}$; de elementen van orde 2 zitten in de klassen $\{g^3\}$, $\{a, ag^2, ag^4\}$ en $\{ag, ag^3, ag^5\}$. De elementen van orde 3 zitten in de klasse $\{g^2, g^4\}$. De elementen van orde 6 bepalen de laatste klasse: $\{g, g^5\}$.
- $D_6 \cong C_3 \rtimes (C_2 \times C_2) \cong C_6 \rtimes C_2$.
- $Z(G) = \{1, g^3\}$. Omdat $|G/H| = 4$ is G/H abels en moet $G' < H$. Dus $G' = \{1\}$ of $G' = \{1, b, b^2\}$. Nu kan G' niet triviaal zijn omdat dan G abels zou zijn , dus $G' = \{1, b, b^2\}$. Buiten de triviale deelgroepen hebben we 7 deelgroepen van orde 2: $\{1, g^3\}, \{1, a\}, \{1, ag\}, \{1, ag^2\}\{1, ag^3\}\{1, ag^4\}$ en $\{1, ag^5\}$ allen van type 2/1. Er is ook 1 deelgroep van orde 3: de 3-Sylowdeelgroep $\{1, g^2, g^4\}$ van type 3/1 en die is normaal. Er zijn 3 deelgroepen van orde 4: de 2-Sylowdeelgroepen $\{1, g^3, a, ag^3\}$, $\{1, g^3, ag, ag^4\}$ en $\{1, g^3, ag^2, ag^5\}$, allen van type 4/2. Tenslotte zijn er ook 3 deelgroepen van orde 6: $\{1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$ van type 6/1 en $\{1, ag^4, ag^2, a, g^2, g^4\}, \{1, g^2, g^4, ag, ag^3, ag^5\}$ van type 6/2.
- $Inn(G) \cong G/Z(G)$, dus heeft $Inn(G)$ orde 6. De inwendige automorfismen en hun werking op g en a worden gegeven door:

	g	a
φ_1	g	a
φ_2	g	ag^4
φ_3	g	ag^2
φ_4	g^5a	a
φ_5	g^5	ag^2
φ_6	g^5	ag^2

Er geldt $\varphi_4^2 = 1, \varphi_2^3 = 1, \varphi_4\varphi_2 = \varphi_2^2\varphi_4$. Bijgevolg is:

$$Inn(G) \cong D_3$$

Een automorfisme van G permuteert de elementen van orde 6 en de elementen van orde 2, dus er zijn 12 automorfismen. We hebben al 6 inwendige automorfismen. Definieer dan φ als $\varphi(g) = g$ en $\varphi(a) = ag^5$. De tabel met alle automorfismen en hun werking op g en a is:

	g	a
φ_1	g	a
φ_4	g^5	a
φ^5	g	ag
$\varphi_4\varphi$	g^5	ag
φ_4	g	ag^2
$\varphi_4\varphi^2$	g^5	ag^2

	g	a
φ^3	g	ag^3
$\varphi_4\varphi^3$	g^5	ag^3
φ^2	g	ag^4
$\varphi_4\varphi^4$	g^5	ag^4
φ	g	ag^5
$\varphi_4\varphi^5$	g^5	ag^5

Het automorfisme φ heeft orde 6 en samen met φ_4 brengt het gans de groep voort. Hieruit volgt:

$$Aut(G) \cong D_6$$

Mogelijke realisaties:

- Symmetriegroep van een regelmatige zeshoek.
- Deelgroep van $GL(2,6)$ voortgebracht door $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

De groep van type 12/4

De vierde groep van orde 12 is de groep $G = (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$. Neem $H = \{1, a, c, ac\}$ en $K = \{1, b, b^2\}$, dan is $G = \{1, b, b^2, a, ab, ab^2, c, cb, cb^2, ac, acb, acb^2\}$. Het semidirecte product wordt gedefinieerd door $\varphi_b : H \to H$ met $\varphi_b(a) = ac$ en $\varphi_b(c) = a$ en $\varphi_{b^2} : H \to H$ met $\varphi_{b^2}(a) = c$ en $\varphi_{b^2}(c) = ac$. Dan geldt in de groep G dat : $bc = (1, b)(c, 1) = (\varphi_b(c), b) = (a, b) = ab$. Verder is ook $ca = ac$, $b.ac = cb$ en $ba = ac.b$.
Dus $G = \{a, b, c : a^2 = c^2 = 1, b^3 = 1, ab = bc, cb = bac, ca = ac, ba = acb\}$. We kunnen ook minder generatoren nemen, want $cb^2 = b^2a, acb^2 = ab^2a, cb =$

aba, of $G = \{1, b, b^2, a, ab, ab^2, abab^2, aba, b^2a, bab^2, ba, ab^2a\}$. Bijgevolg is $G = \{a, b : a^2 = b^3 = 1 \text{ en } (ab)^3 = 1\}$.
Dit is de alternerende of tetrahedrale groep A_4 (type 12/4), dus

$$G \cong A_4$$

- G is niet abels en niet enkelvoudig.
- Er zijn 4 toevoegingsklassen: $\{1\}$, $\{a, abab^2, bab^2\}$ met de elementen van orde 2 en $\{b, ab, ba, aba\}$ en $\{b^2, ab^2, b^2a, ab^2a\}$, met de elementen van orde 3.
- $A_4 \cong (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$.
- $Z(G) = \{1\}$. Er zijn 3 deelgroepen van orde 2: $\{1, a\}, \{1, abab^2\}$ en $\{1, bab^2\}$, allen van type 2/1. Er zijn vier 3-Sylowdeelgroepen van type 3/1: $\{1, b, b^2\}, \{1, ab, b^2a\}, \{1, ba, ab^2\}$ en $\{1, aba, ab^2a\}$. Volgens de stellingen van Sylow zijn deze niet normaal. Er is 1 deelgroep van orde 4: $\{1, a, abab^2, bab^2\}$ en die is normaal. Er zijn geen deelgroepen van orde 6, dus moet $G' = \{1, a, abab^2, bab^2\}$, want dit is de enige normale deelgroep van G.
- Omdat $Z(G) = \{1\}$ is $Inn(G) \cong G$. Neem een willekeurig automorfisme van G en neem de generatoren a en b. Dan zijn er voor $\varphi(b)$ 8 keuzemogelijkheden. Omdat elk automorfisme van G de deelgroep G' op zichzelf afbeeldt en omdat $a \in G'$ zijn er 3 keuzemogelijkheden voor $\varphi(a)$. Er zijn dus 24 automorfismen van G. Bijgevolg is $Aut(G) \cong S_4$.

Mogelijke realisaties:

- Als we $a = (12)(34), c = (13)(24), ac = (14)(23), b = (123), b^2 = (132), ab = (243), ab^2 = (143), cb = (142), cb^2 = (234), acb = (134)$ en $acb^2 = (124)$, dan hebben we alle 3-cykels van S_4 en dit is A_4.
- De deelgroep van $GL(3, 2)$ voortgebracht door
$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De groep van type 12/5

De vijfde groep van orde 12 is de groep $C_3 \rtimes C_4$. Neem $H = \{1, b, b^2\}$ de normale 3-Sylowdeelgroep en $K = \{1, a, a^2, a^3\}$ een 2-Sylowdeelgroep.

We weten dat $Aut(H) \cong C_2$. Het enige niet-identieke automorfisme van H beeldt b af op b^2. Definieer $\varphi : K \to Aut(H) : a \mapsto (\varphi_a : H \to H : b \mapsto b^2)$. Dan is $G = \{1, b, b^2, a, ba, b^2a, a^2, ba^2, b^2a^2, a^3, ba^3, b^2a^3\}$ en $ab = (1, a)(b, 1) = (\varphi_a(b), a) = (b^2, a) = b^2a$. Analoog is $ab^2 = ba$. We noemen dit de dicyclische groep Dic_3 (van type 12/5). Een dicyclische groep Dic_n is de uitbreiding van de cyclische groep C_2 met de cyclische groep C_{2n}.

$$Q_6 = \{a, b : a^4 = b^3 = 1 \text{ en } ab = b^2a\}$$

- G is niet abels en niet enkelvoudig.
- Er zijn 6 toevoegingsklassen: $\{1\}$,$\{a^2\}$ met het element van orde 2, $\{b, b^2\}$ met de elementen van orde 3 en $\{a, b^2a, ba\}$, $\{a^3, ba^3, b^2a^3\}$ met de elementen van orde 4. De elementen van orde 6 bepalen de laatste klasse: $\{ba^2, b^2a^2\}$.
- $Dic_3 \cong C_3 \rtimes C_4 \cong C_3 \rtimes (C_2 \#^f C_2)$.
- $Z(G) = \{1, a^2\}$. Omdat $|G/H| = 4$ is G/H abels en moet $G' < H$. Dus $G' = \{1\}$ of $G' = \{1, b, b^2\}$. Nu kan G' niet triviaal zijn omdat dan G abels zou zijn , dus $G' = \{1, b, b^2\}$. Buiten de triviale deelgroepen hebben we een deelgroep van orde 2: $\{1, a^2\}$ van type 2/1. Er is ook 1 deelgroep van orde 3: de 3-Sylowdeelgroep $\{1, b, b^2\}$ van type 3/1. Er zijn 3 deelgroepen van orde 4: de 2-Sylowdeelgroepen $\{1, a, a^2, a^3\}$, $\{1, b^2a, a^2, b^2a^3\}$ en $\{1, ba, a^2, ba^3\}$, allen van type 4/1. Tenslotte is er ook 1 deelgroep van orde 6: $\{1, a^2, b, b^2, ba^2, b^2a^2\}$ van type 6/2. Deze deelgroep is een normaaldeler van G. Elke echte deelgroep is dus cyclisch.
- $Inn(G) \cong G/Z(G)$, dus heeft $Inn(G)$ orde 6. De inwendige automorfismen en hun werking op a en b worden gegeven door:

	a	b
φ_1	a	b
φ_2	a	b^2
φ_3	b^2a	b
φ_4	ba	b
φ_5	b^2a	b^2
φ_6	ba	b^2

Er geldt $\varphi_2^2 = 1, \varphi_3^2 = \varphi_4, \varphi_3^3 = 1, \varphi_6 = \varphi_2\varphi_3 = \varphi_3^2\varphi_2$ en $\varphi_5 = \varphi_2\varphi_3^2 = \varphi_3\varphi_2$. Bijgevolg is:

$$Inn(G) \cong D_3$$

Een automorfisme van G permuteert de elementen van orde 4 en de elementen van orde 3, dus er zijn 12 automorfismen. We hebben al 6 inwendige automorfismen. Definieer dan φ als $\varphi(a) = a^3$ en $\varphi(b) = b$. De tabel met alle automorfismen en hun werking op a en b is:

	a	b
φ_1	a	b
φ	a^3	b
φ_3	b^2a	b
$\varphi\varphi_3$	b^2a^3	b
φ_3^2	ba	b
$\varphi\varphi_3^2$	ba^3	b

	a	b
φ_2	a	b^2
$\varphi\varphi_2$	a^3	b^2
$\varphi_2\varphi_3^2$	b^2a	b^2
$\varphi\varphi_2\varphi_3^2$	b^2a^3	b^2
$\varphi_2\varphi_3$	ba	b^2
$\varphi\varphi_2\varphi_3$	ba^3	b^2

Het automorfisme $\varphi\varphi_3^2$ heeft orde 6 en samen met φ_2 brengt het gans de groep voort. Hieruit volgt:

$$Aut(G) \cong D_6$$

Mogelijke realisaties:

- De groep voortgebracht door $a = \begin{pmatrix} 0 & i//i & 0 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$.
- De deelgroep van $GL(2, 15)$ voortgebracht door $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Besluit:

Er zijn 2 abelse groepen van orde 12:

$$C_4 \times C_3 \text{ en } (C_2 \times C_2) \times C_3$$

en er zijn 3 niet abelse groepen van orde 12:

$$(C_2 \times C_2) \rtimes C_3, C_3 \rtimes C_4 \text{ en } C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$$