Een andere karakterisatie van $U(\mathbb{Z}C_8)$

1 Inleiding

De eenheden groep van $\mathbb{Z}C_8$ is van de vorm $\pm C_8 \times F$ waarbij F vrij abels is van rang $r = \frac{1}{2}(n + 1 + a_2 - 2.l) = \frac{1}{2}(8 + 1 + 1 - 2.4) = 1$. In zijn boek Unit group of grouprings gaf G.Karpilovsky volgende karakterisatie:

$$U(\mathbb{Z}C_8) = \pm C_8 \times \left\langle g^6 + 2g^5 + g^4 - g^2 - g - 1 \right\rangle$$

Hierin wordt eerst gesteld dat $\mathbb{Q}C_8 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_8)$ als $\mathbb{Q}$-algebra. Dan zien we dat $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(\epsilon_8)$ de ring der gehelen is van $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) \oplus \mathbb{Q}(\epsilon_8)$. De eerste drie componenten hebben enkel triviale eenheden. Dus de werkwijze is om een set van fundamentele eenheden te vinden in $\mathbb{Z}(\epsilon_8)$, die dat terug te trekken naar $\mathbb{Z}C_8$ en te stellen dat de projecties in de eerste drie componenten enkel triviale eenheden opleveren.

2 Alternatieve werkwijze

In dit artikel beschrijven we een andere methode die eerder gebaseerd is op de methode van de onbepaalde coëfficiënten : neem $a = \sum_{i=0}^{7}$ een torsie vrije eenheid in $\mathbb{Z}C_8$. De bedoeling is nu door middel van een paar voorwaarden de coëfficiënten a_i te bepalen.

- Neem $\rho_8 : \mathbb{Z}C_8 \longrightarrow \mathbb{Z}(\epsilon_8) : g \longmapsto \epsilon_8$. Omdat $\epsilon_8^4 = -1$ is $\rho_8(a) = (a_0 - a_4) + (a_1 - a_5)\epsilon_8 + (a_2 - a_6)\epsilon_8^2 + (a_3 - a_7)\epsilon_8^3$.
- Neem $H = \{1, g^4\}$ en definieer $\varphi : \mathbb{Z}C_8 \longrightarrow \mathbb{Z}C_8/H : \sum_{i=0}^{7} a_i g^i \longmapsto \sum_{i=0}^{7} a_i g^i H$. Omdat $\mathbb{Z}C_8/H \cong C_4$ heeft $\mathbb{Z}C_8/H$ enkel triviale eenheden. Bijgevolg is $\varphi(a) = H$ en geldt er dat $a_0 + a_4 = 1$ en $a_i + a_{i+4} = 0$ $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.
- We weten dat $\epsilon_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. Maar dan is $\rho_8(a) = (2a_0 - 1) + 2a_1\epsilon_8 + 22\epsilon_8^2 + 23\epsilon_8^3 = (2a_0 - 1) + 2a_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right) + 2a_2\imath + 2a_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\right) = (2a_0 - 1) + (a_1 - a_3)\sqrt{2} + (a_1 + a_3)\sqrt{2}\imath + 2a_2 i$. Vergeet niet dat $\rho_8(a)$ een torsievrije eenheid is, omdat ρ_8 een homomorfisme is.
- Hoe zien de eenheden eruit in de deelring $A = \{a + b\sqrt{2} + 2c\imath + d\imath\sqrt{2} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$?

- We kunnen bewijzen dat $\gamma = a + b\sqrt{2} + 2c\imath + d\imath\sqrt{2}$ een torsievrije eenheid ij in A als en slechts als $c = d = 0$ en $a^2 - 2b^2 = 1$.

- We definieren voor elke torsievrije eenheid $\gamma = a + b\sqrt{2} + 2c\imath + d\imath\sqrt{2}$ de uitdrukking $\tilde{\gamma} = a - b\sqrt{2} + 2c\imath - d\imath\sqrt{2}$. Neem het groepshomomorfisme $f : U(A) \longrightarrow U(\mathbb{Z}(\imath) : \gamma \longmapsto \gamma.\tilde{\gamma}$. Dan geldt er dat $f(\gamma) = (a^2 - 2b^2 - 4c^2 + 2d^2) + (4ac - 4bd)\imath$. Omdat γ torsie vrij is en omdat $\mathbb{Z}(\imath)$ enkel triviale eenheden heeft moet $f(\gamma) = 1$ en dus is $a^2 - 2b^2 - 4c^2 + 2d^2 = 1$ en $ac = bd$. Noteer $ac = bd = k$ en veronderstel $k \neq 0$ dan is $c = \frac{k}{a}$ en $d = \frac{k}{b}$. Als we dat invullen in de voorwaarde $a^2 - 2b^2 - 4c^2 + 2d^2 = 1$ vinden we dat $a^2 - 2b^2 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+2k^2}$. Omdat het rechterlid hiervan tussen 0 en 1 ligt kan het linkerlid geen geheel getal zijn en klopt de voorwaarde $k \neq 0$ niet. Bijgevolg is $ac = bd = 0$. Uit $a^2 - 2b^2 - 4c^2 + 2d^2 = 1$ volgt dan dat $c = d = 0$ en $a^2 - 2b^2 = 1$. Omgekeerd, als $c = d = 0$ en $a^2 - 2b^2 = 1$,

  dan is $\gamma = a + b\sqrt{2}$ met $a^2 - 2b^2 = 1$. Uit de getallentheorie volgt dan dat γ een torsievrije eenheid is in $\mathbb{Z}(\sqrt{2}$.

- Omdat $\rho_8(a) = (2a_0 - 1) + (a_1 - a_3)\sqrt{2} + (a_1 + a_3)\sqrt{2}\imath + 2a_2 i$ een torsie vrije eenheid is moet dus, volgens vorige stelling, $a_2 = a_1 + a_3 = 0$ en $(2a_0 - 1)^2 - 2(a_1 - a_3)^2 = 1$. Dus is $a_2 = 0$, $a_3 = -a_1$ en $(2a_0 - 1)^2 - 8a_1^2 = 1$. Bijgevolg is $\rho_8(a)$ een eenheid in $\mathbb{Z}(\sqrt{2}$.

- Bovendien weten we dat elke eenheid in $\mathbb{Z}(\sqrt{2}$ van de vorm $\pm(1 + \sqrt{2})^k$.

- Bovendien moet er een $k \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $(2a_0 - 1)^2 + 2a_1\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^k$. Voor $k = 1$ heb je geen oplossingen, maar als je $k = 2$ neemt moet $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 0$ en $a_3 = -1$. dan is $a_4 = -1, a_5 = -1, a_6 = 0$ en $a_7 = +1$ Bijgevolg is $a = 2 + g - g^3 - g^4 - g^5 + g^7 = g^3(g^6 + 2g^5 + g^4 - g^2 - g - 1)$.

- Dus : $U(\mathbb{Z}C_8) = \pm C_8 \times \left\langle g^6 + 2g^5 + g^4 - g^2 - g - 1 \right\rangle$

3 Nog anders...

De oplossing uit vorig hoofdstuk kan je ook schrijven als $a = 2 + g - g^3 - g^4 - g^5 + g^7 = g^4\Big(-1 - (g + g^{-1}) + (g^3 + g^{-3}) + 2g^4\Big)$. Hierbij is $-1 - (g + g^{-1}) + (g^3 + g^{-3}) + 2g^4$ een symmetrische eenheid. Gebruiken we nu de methode van de onbepaalde coëfficiënten op een willekeurige symmetrische eenheid $a = p + q(g + g^{-1}) + r(g^2 + g^{-2}) + s(g^3 + g^{-3}) + 2tg^4$. Volgen we dezelfde stappen als hierboven:

- Uit $\epsilon_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ volgt dat $\rho_8(g + g^{-1}) = \sqrt{2}$, $\rho_8(g^2 + g^{-2}) = 0$ en $\rho_8(g^3 + g^{-3}) = -\sqrt{2}$.

- Dus is $\rho_8(a) = (p - 2t) + (q - s)\sqrt{2}$.

- Neem $H = \{1, g^4\}$ en definieer $\varphi : \mathbb{Z}C_8 \longrightarrow \mathbb{Z}C_8/H : \sum_{i=0}^{7} a_i g^i \longmapsto \sum_{i=0}^{7} a_i g^i H$. Omdat $\mathbb{Z}C_8/H \cong C_4$ heeft $\mathbb{Z}C_8/H$ enkel triviale eenheden. Bijgevolg is $\varphi(a) = H$ en $p + 2t = 1, q + s = 0$ en $r = 0$.

- Dit geeft uiteindelijk dat $\rho_8(a) = (2p - 1) + 2q\sqrt{2}$

- Elke eenheid in $\mathbb{Z}(\sqrt{2}$ van de vorm $\pm(1 + \sqrt{2})^k$. Dus moet er een $k \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $(2p - 1) + 2q\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^k$. Voor $k = 1$ vinden we geen gehele oplossingen voor p en q. Maar voor $k = 2$ en een -teken ervoor is $p = -1$ en $q = -1$.

- Uit vorige vergelijkingen volgt dan dat $r = 0$, $s = 1$ en $t = 1$.

- Dus is $a = -1 - (g + g^{-1}) + (g^3 + g^{-3}) + 2g^4$ en krijgen we hetzelfde resultaat dan hierboven.