1 Inleiding

In een mannentoilet staan 13 urinoirs op een rijtje. Persoon 1 komt binnen en kan kiezen waar hij zich zet. Nadien komt persoon 2 binnen en kiest een zo ver mogelijke plaats van persoon 1. Daarna komt persoon 3 binnen en maximaliseert de afstand tot de persoon waar hij het dichtste tegen staat. Indien er meerdere plaatsen zijn die de afstand maximaliseren, dan kiest hij willekeurig. Er blijven personen binnen komen die aan hetzelfde principe de urinoirs vullen. Personen gaan zich nooit vlak naast elkaar zetten (er blijft altijd minstens 1 plek tussen) Waar moet de eerste persoon zich nu zetten zodat de urinoirs optimaal gevuld zullen zijn? En hoe ziet zo'n optimale vulling er uit? Voor welke hoeveelheid urinoirs zal het altijd optimaal gevuld kunnen zijn?

We herformuleren de vraag: Gegeven een rij van n plaatsen. We kunnen die plaatsen opvullen volgens volgende regels:

1. De eerste persoon kiest willekeurig een plaats.
2. De tweede persoon kiest een plaats zo ver verwijderd als mogelijk van persoon 1.
3. Elke volgende persoon maximaliseert de afstand tot de persoon waar hij het dichtst bijstaat.
4. Indien er meerdere plaatsen zijn die de afstand maximaliseren, dan kiest hij willekeurig.
5. Personen gaan zich nooit vlak naast elkaar zetten.

Er blijven personen binnen komen die aan hetzelfde principe de urinoirs vullen. We stellen volgende onderzoeksvragen:

1. Waar moet de eerste persoon zich nu zetten zodat de urinoirs optimaal gevuld zullen zijn?

2. Voor welke hoeveelheid urinoirs zal het altijd optimaal gevuld kunnen zijn?

2 Notaties en afspraken

- Een rij van n plaatsen noteren we met een n-tal. Zo is $(1, 0, 3, 0, 2)$ een rijtje van 5 plaatsen waarbij persoon 1 op plaats 1 zit, persoon 2 op plaats 5 en persoon 3 op plaats 3. Het cijfer 0 betekent een lege plaats.

- Een getal n noemen we een *geschikt getal* als er een optimale schikking voor n bestaat.

- Een optimale schikking is een schikking waarbij elke persoon, links en/of rechts juist 1 lege plaats heeft.

- We definiëren een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Met elk geschikt getal n correspondeert $f(n)$: het kleinste rangnummer waarop de eerste persoon kan gaan zitten om die optimale schikking te verkrijgen.

3 Op verkenning

- De gevallen $n = 1$ en $n = 2$ zijn niet interessant.

- 3 is een geschikt getal. Mogelijke optimale schikkingen zijn $(1, 0, 2)$ en $(2, 0, 1)$ en dus is $f(3) = 1$.

- 4 is geschikt getal. We onderzoeken alle mogelijke posities voor de eerste persoon en vinden de volgende schikkingen $(1, 0, 0, 2)$, $(0, 1, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 0)$ en $(2, 0, 0, 1)$. De tweede en derde situatie geven een optimale schikking en $f(4) = 2$.

- 5 is een geschikt getal.Optimale schikkingen: $(1, 0, 3, 0, 2)$ en $(2, 0, 3, 0, 1)$. Bijgevolg is $f(5) = 1$.

- 6 is een geschikt getal met optimale schikkingen $(0, 1, 0, 3, 0, 2)$ en $(2, 0, 3, 0, 1, 0)$ en $f(6) = 2$.

- 7 is een geschikt getal met optimale schikkingen $(4,0,1,0,3,0,2)$ en $(2,0,3,0,1,0,4)$ en $f(7) = 3$. Bij de optimale schikkingen kan je 3 en 4 onderling van plaats wisselen.

- 8 is geen geschikt getal. De verschillende posities van de eerste persoon geven $(1,0,0,3,0,4,0,2), (0,1,0,0,3,0,0,2), (3,0,1,0,4,0,0,2)$ of $(3,0,0,1,0,4,0,2)$. Geen van deze 4 geeft een optimale schikking. Merk op dat bij de laatste situatie persoon 3 op de eerste plaats moet komen volgens regel 3 en niet op de tweede plaats, wat dan wel een optimale schikking was geweest.

- 9 is een geschikt getal met optimale schikking $(1,0,4,0,3,0,5,0,2)$ of $(2,0,4,0,3,0,5,0,1)$ en $f(9) = 1$. De plaatsen van personen 4 en 5 kunnen onderling worden gewisseld.

- 10 is een geschikt getal met optimale schikking $(0,1,0,4,0,3,0,5,0,2)$ en $f(10) = 2$. De plaatsen van personen 4 en 5 kunnen onderling worden gewisseld.

- 11 is een geschikt getal met optimale schikking $(6,0,1,0,4,0,3,0,5,0,2)$ en $f(10) = 3$. De plaatsen van personen 4,5 en 6 kunnen onderling worden gewisseld.

- 12 is geen geschikt getal? Geen enkele positie van persoon 1 geeft een optimale schikking.

- 13 is een geschikt getal met optimale schikking $(3,0,5,0,1,0,6,0,4,0,7,0,2)$ en $f(13) = 5$. De plaatsen van personen 5,6 en 7 kunnen onderling worden gewisseld.

Wat merken we op?

- Uit symmetrie overwegingen, kunnen we persoon 1 steeds in de eerste helft van de plaatsen zetten (dus voor plaats $\frac{n+1}{2}$).

- Persoon 2 neemt altijd plaats n in.

- Links van persoon 1 zijn er altijd 2^x plaatsen vrij.

- Tussen persoon 1 en 2 is er altijd een oneven aantal plaatsen vrij.

- We kunnen dus een persoon juist in het midden zetten.

In volgende tabel geven we een overzicht. Met de linkerstaart van een geschikt getal n bedoelen we het aantal plaatsen dat er links van 1 nog open staan. Idem met de rechterstaart. In kolom 3 en 4 geven we respectievelijk de linkerstaart en rechterstaart weer.

n	$f(n)$	LS	RS
3	1	0	2
4	2	1	2
5	1	0	4
6	2	1	4
7	3	2	4
9	1	0	8
10	2	1	8
11	3	2	8
13	5	4	8

4 Stellingen

We merken in vorige tabel op dat de rechterstaart altijd een macht van 2 is en dat de linkerstaart ofwel 0 ofwel een macht van 2 is. Na het plaatsen van persoon 1 ontstaan dus 1 of 2 gebieden van lengte een macht van 2. Zijn dat nu voldoende voorwaarden om een geschikt getal te hebben?

Stelling 4.1. $n = 2^p + 1$ *is een geschikt getal.*

Bewijs. Plaats persoon 1 op plaats 1 en persoon 2 op plaats n. Omdat n oneven is kan je persoon 3 in het midden plaatsen, op positie $\frac{n+1}{2}$. Links en rechts van persoon 3 zijn er dus nog $\frac{1}{2}(2^p + 1 - 3) = 2^{p-1} - 1$ plaatsen open. Dit is een oneven aantal, dus kan je persoon 4 in het midden van bijvoorbeeld 1 en 3 zetten. Links en rechts van deze persoon zijn er dan nog $2^{p-2} - 1$ plaatsen open. Dit kan je zo verder zetten totdat $2^1 - 1 = 1$ plaats open is en dan krijg je een optimale schikking omdat er tussen elke twee personen juist 1 plaats tussen zit

□

Stelling 4.2. $n = 2^p + 2^q + 1$ *is een geschikt getal.*

Bewijs. Zet persoon 1 zodat er links 2^p en rechts 2^q plaatsen vrij zijn. Vanaf de positie van persoon 1 tot het einde zijn er dus 2^q+1 plaatsen, met persoon 1 op de eerste plaats. Pas hierop vorig resultaat toe. Vanaf het begin tot aan persoon 1 zijn er 2^p+1 plaatsen met persoon 1 op de laatste plaats. De eerste of laatste plaats maakt eigenlijk niets uit, dus kan je ook hier vorig resultaat toepassen. Alzo kan je een optimale schikking vinden. De plaatsing van de personen hangt af van de waarde van p en q. Zo moet je, volgens regel 3, soms links soms rechts van persoon 1 aanvullen, maar dat maakt niets uit: je kan steeds vorige stelling gebruiken. □