1 Inleiding

We gaan onderzoeken welke getallen er construeerbaar zijn met de klassieke constructieapparaten, *passer en liniaal*. Verder bestuderen we ook de structuur van de verzameling van alle construeerbare getallen. We komen zo tot een modern algebraïsch bewijs van de onmogelijkheid om met passer en liniaal een kubus te verdubbelen. Dit is een welbekend probleem uit de oude Griekse meetkunde. Zo zien we dat algebra en meetkunde enerzijds en oude en moderne wiskunde anderzijds erg nauw samenlopen.

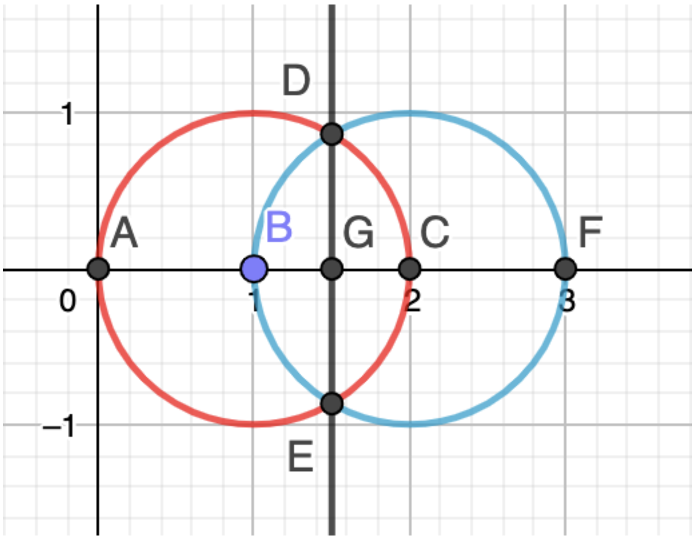
2 Construeerbare punten

We starten met 2 punten: $\{(0,0),(1,0)\}$. We noemen dit de constructiebasis $\mathcal{B}$. De punten noteren we met A en B. Nu moeten we afspreken welke operaties met passer en liniaal we toelaten:

- Trek een rechte die 2 punten van $\mathcal{B}$ verbindt.
- Trek een cirkel met als centrum een punt van $\mathcal{B}$ en als straal de afstand tussen 2 punten van $\mathcal{B}$.

De snijpunten van de zo getrokken rechten en cirkels leveren ons nieuwe punten, die op hun beurt gebruikt kunnen worden om rechten en cirkels te tekenen. De punten van $\mathcal{B}$ en de punten die we met deze operaties kunnen toevoegen, noemen we *construeerbare punten*. Een paar voorbeelden:

- Teken de rechte door A en B(de X-as) en teken de cirkel met B als centrum en als straal $|AB|$. De snijpunten van deze cirkel met de X-as zijn A en $C(2,0)$. Bijgevolg is $(2,0)$ een construeerbaar punt. Zo zien we dat alle punten $(x,0)$ met $x \in \mathbb{Z}$ construeerbare punten zijn.
- Teken een tweede cirkel met C als middelpunt en als straal $|AB|$. De twee cirkels snijden elkaar in $D(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ en $E(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$. Het snijpunt met de X-as is $F(3,0)$. Dus zijn$(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ en $(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ construeerbare punten.
- Teken de rechte door D en E. Het snijpunt met de X-as is $G(\frac{3}{2},0)$. Bijgevolg is ook $(\frac{3}{2},0)$ een construeerbaar punt.



Stelling 2.1. *Je kan een cirkel met als straal een willekeurig natuurlijk getal construeren.*

Bewijs. Vermits alle punten $N(n, 0)$ construeerbaar zijn, kan je als straal steeds de afstand van $A(0, 0)$ tot N nemen. □

Stelling 2.2. *Als de rechte r en het punt P construeerbaar zijn, dan is de loodlijn op r door P ook construeerbaar.*

Bewijs. We nemen volgende stappen:

1. Teken een cirkel met middelpunt P en een straal groter dan de afstand van P tot r.

2. De snijpunten van deze cirkel met r zijn de construeerbare punten K en L.

3. Met K en L als middelpunt construeren we 2 cirkels met zelfde willekeurige straal.

4. De snijpunten S en T van die cirkels zijn construeerbare punten.

5. Teken de construeerbare rechte ST. Deze staat loodrecht op r en gaat door P.

□

De Y-as is dus construeerbaar.

Stelling 2.3. *Als de rechte r en het punt P construeerbaar zijn, dan is de evenwijdige aan r door P ook construeerbaar.*

Bewijs. We nemen volgende stappen:

1. De loodlijn l door P op r is construeerbaar volgens vorige stelling.
2. De loodlijn m door P op l is dan ook construeerbaar.
3. De construeerbare rechte m is evenwijdig aan r.

□

Stelling 2.4. *Het midden van 2 construeerbare punten is ook construeerbaar.*

Bewijs. Stel $A(a, 0)$ en $B(b, 0)$ construeerbaar. De cirkels met middelpunten A en B en straal $lAB|$ zijn construeerbaar, evenals hun snijpunten K en L. De rechte KL is construeerbaar en snijdt de X-as in het midden van A en B, dat dus ook construeerbaar is. □

3 Construeerbare getallen

Een reëel getal k is construeerbaar als en slechts als $(k, 0)$ een construeerbaar punt is.

Equivalent hiermee zijn volgende omschrijvingen:

- Een reëel getal k is construeerbaar als en slechts als $(0, k)$ een construeerbaar punt is.

- Een reëel getal k is construeerbaar als en slechts als er een reëel getal α bestaat zodat (α, k) construeerbaar is.
- Een reëel getal k is construeerbaar als en slechts als er een reëel getal α bestaat zodat (k, α) construeerbaar is.
- Een reëel getal k is construeerbaar als en slechts als de cirkel met centrum $(0,0)$ en straal $|k|$ construeerbaar is.

De verzameling van alle construeerbare reële getallen noteren we als $\mathbb{K}$.
Uit vorig hoofdstuk volgt:

Stelling 3.1. *Elk geheel getal is construeerbaar:* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$.

Maar verder geldt ook:

Stelling 3.2. *Elk rationaal getal is construeerbaar:* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Bewijs. Stel $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ met $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}_{\not 0}$. Dan zijn $N = (n, 0)$ en $M = (0, m)$ construeerbaar. Verbindt N met $E = (0, 1)$. De rechte NE is construeerbaar. De rechte door M, evenwijdig met NE is ook construeerbaar. Het snijpunt S van deze evenwijdige met de X-as is eveneens construeerbaar. Volgens de stelling van Thales is $S = (\frac{m}{n}, 0)$. Dus is q construeerbaar. $\square$

Ook de vierkantswortels zitten in $\mathbb{K}$:

Stelling 3.3. *Als* $k \in \mathbb{K}$ *en* $k \geq 0$*, dan is* $\sqrt{k} \in \mathbb{K}$*. We zeggen dat* $\mathbb{K}$ *wortel stabiel is.*

Bewijs. We weten dat $(k, 0)$ en $(-1, 0)$ construeerbaar zijn. Dan is ook het midden $M = (\frac{k-1}{2}, 0)$ construeerbaar. Teken de cirkel met middelpunt M en straal $\frac{k+1}{2}$. Deze snijdt de Y-as in $(0, v)$ met $v^2 = k$. ieruit volgt dan dat $\sqrt{k}$ construeerbaar is. $\square$

Er resten ons nog een paar onderzoeksvragen:

- Is elk reëel getaal construeerbaar?

- Kunnen we een veldstruktuur leggen op $\mathbb{K}$?
- Zo ja, wat is de graad van de velduitbreiding dan?

4 Het veld $\mathbb{K}$

- Omdat $\mathbb{K}$ een deelverzameling is van $\mathbb{R}$ kunnen we de optelling en vermenigvuldiging van $\mathbb{R}$ overnemen. We tonen aan dat $\mathbb{K}$ een deelveld is van $\mathbb{R}$.

Stelling 4.1. $\mathbb{K}$ *een deelveld is van* $\mathbb{R}$.

Bewijs. We hoeven enkel te bewijzen dat voor 2 construeerbare getallen k en l, ook $k - l$ en $\frac{k}{l}$ (met $l \neq 0$) eveneens construeerbaar zijn. Teken een cirkel met centrum $(0, k)$ en straal $|l|$. Deze snijdt de Y-as in de punten $(0, k - l)$ en $(0, k + l)$. Dus zijn $k - l$ en $k + l$ construeerbaar. Wat betreft $\frac{k}{l}$, gebruiken we dezelfde constructie als in het bewijs over rationale getallen. □

- Omdat $\mathbb{Q}$ niet wortelstabiel is, is het veld $\mathbb{K}$ strikt groter dan $\mathbb{Q}$. Is $\mathbb{K}$ misschien gelijk aan $\mathbb{R}$? We voeren volgende notatie in: het kleinste deelveld van $\mathbb{R}$, dat de reële getallen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ en het veld $\mathbb{Q}$ bevat, noteren we als $\mathbb{Q}(r_1, r_2, \cdots, r_n)$. Een paar voorbeelden:
  - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
  - $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
  - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

  Elk veld is een vectorruimte over elk van zijn deelvelden en heeft als dusdanig een dimensie. Hierover kennen we volgende stelling:

Stelling 4.2. *$K \subset L \subset M$ velden. Als $dim_K L = a$ en $dim_L M = ab$, dan is $dim_K M = ab$.*

- We willen nu onderzoeken wat de dimensie is van de velduitbreiding van $\mathbb{Q}$ met een construeerbaar getal k. Als $k \in \mathbb{K}$ dan is het punt $p = (k, 0)$ construeerbaar. Stel dat $p_1(0, 0), p_2 = (1, 0), p_3, p_4, \cdots, p_n =$

$p = (k, 0)$ de punten die we achtereenvolgens moeten construeren om p te verkrijgen. Stel dat $p_i = (x_i, y_i)$, definieer dan :

$$\begin{gathered} K_0 = \mathbb{Q} \\ K_1 = K_0(x_1, y_1) \\ K_2 = K_1(x_2, y_2) \\ K_3 = K_2(x_3, y_3) \\ \dots \\ K_{n-1} = K_{n-2}(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ K_n = K_{n-1}(x_n, y_n) = K_{n-1}(k) \end{gathered}$$

- We onderzoeken voor elke i: $\dim_{K_{i-1}} K_i$. We moeten hiervoor 3 gevallen onderscheiden:
  - p_i is het snijpunt van twee rechten.
  - p_i is het snijpunt van een rechte en een cirkel.
  - p_i is het snijpunt van twee cirkels.
- Als p_i het snijpunt is van twee rechten door punten waarvan de coördinaten tot K_{i-1} behoren moeten we dus een stelsel van 2 vergelijkingen van de eerste graad oplossen. Het is duidelijk dat de oplossingen terug in K_{i-1} zitten, dus dat $K_i = K_{i-1}$ en $\dim_{K_{i-1}} K_i = 1$.
- Als p_i het snijpunt is van een rechte en een cirkel, krijgen we een stelsel met een vergelijking van de eerste graad en eentje van de tweede graad. De oplossing voor x_i is een wortel van een polynoom van graad 2, dus is $\dim_{K_{i-1}} K_i = 1$ of $\dim_{K_{i-1}} K_i = 2$.
- Als p_i het snijpunt is van twee cirkels, krijgen we een stelsel van 2 vergelijkingen van graad 2. Door de vergelijkingen van de 2 cirkels van elkaar af te trekken , vinden we dat dit stelsel gelijkwaardig is met een stelesel bestaande uit 1 vergelijking van graad 1 en 1 vergelijking van graad 2. Dus geldt: $\dim_{K_{i-1}} K_i = 1$ of $\dim_{K_{i-1}} K_i = 2$.
- Zo komen we tot de hoofdstelling van dit artikel:

Stelling 4.3. *Als k een construeerbaar getal is, dan $\exists m \in \mathbb{N}$:*

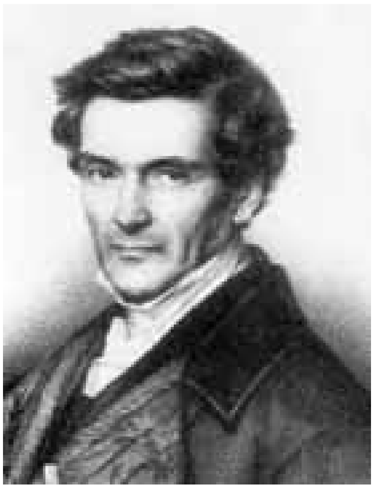
$$dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(k) = 2^m$$

Deze stelling staat bekend als de stelling van Wantzel, een Franse wiskundige (1814-1848).

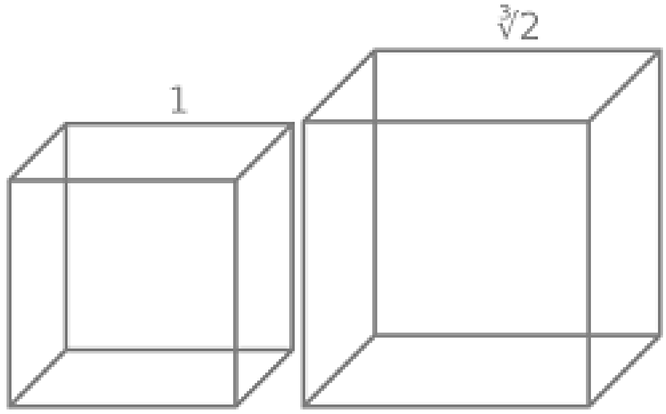
5 Het Delisch probleem

De pest woedde op het Griekse eiland Delos en de Deliërs vroegen het orakel hoe aan dit onheil een eind kon komen. Het orakel antwoordde dat men het altaar van Apollo, dat de vorm had van een kubus, moest verdubbelen. Ijverige werklieden gingen onmiddellijk aan het werk en bouwden een nieuw altaar met dubbele ribbe. Dit was echter verloren moeite zodat de Deliërs andermaal het orakel raadpleegden. Ditmaal was de boodschap duidelijk. Het volume van het nieuwe altaar moest het dubbele van het oude zijn.

Bij de Grieken was de verdubbeling van het vierkant een erg populaire constructie. Ze moesten hiervoor alleen maar op de diagonaal van het gegeven vierkant een nieuw vierkant construeren. Het probleem van Delos sluit hierbij aan. Sinds de vijfde eeuw voor Christus hebben bekwame Grieks wiskundigen, zoals Hippocrates van Chios, Archytas en Menaichmos, op het Delisch probleem gewerkt. Er werden enkele vernuftige kubusverdubbelingen gevonden. Deze waren echter niet gerealiseerd met passer en liniaal. Pas in de 17de eeuw groeide het vermoeden dat dergelijke constructie onmogelijk is met passer en liniaal. Het vermoeden werd in 1837 bewezen door Pierre-Laurent Wantzel.



Neem een kubus met ribbe 1, dan heeft de kubus met dubbele inhoud een ribbe gelijk aan $\sqrt[3]{2}$. Nu is $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = 3$. Bijgevolg is, volgens de stelling van Wantzel, $\sqrt[3]{2}$ geen construeerbaar getal!



Andere problemen die zo kunnen worden aangepakt:

- De driedeling van een hoek. Uitgaande van de formule $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, vindt men door te stellen dat $\cos 3\alpha = a$ en $\cos\alpha = x$, dat bij een gegeven hoek α met $\cos 3\alpha = a$, geldt dat voor $x = \cos\alpha$: $4x^3 - 3x - a = 0$. Deze vergelijking kan je meestal niet ontbinden, waardoor een oplossing van die vergelijking niet van graad 1 of 2 is. Volgens de stelling van Wantzel kan men dus in het algemeen de driedelig van een hoek niet uitvoeren met passer en liniaal. Merk op dat voor sommige waarden van a dit wel kan.

- Het probleem van 2 middenevenredigen. Hiermee wordt bedoeld het bepalen van 2 getallen x en y zodat $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Hieruit leidt men af dat $x^2 = ay$ en $y^2 = bx$ en dus $x^4 = a^2bx$. Dan volgt voor $x \neq 0$, dat $x^3 - a^2b = 0$. Net zoals bij de driedeling kan men hieruit afleiden dat de constructie van twee middelevenredigen, in het algemeen, niet uitvoerbaar is met passer en liniaal.