1 Inleiding

Een algemene tweedegraads vergelijking $ax^2+bx+c=0$ kan worden opgelost met de formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

We vragen ons af of er voor een willekeurige derdegraads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, met $a \neq 0$, ook een algemene oplossingsmethode bestaat. We weten wel al zeker dat elke derdegraads vergelijking minstens 1 reële oplossing heeft. Dit in tegenstelling tot de tweedegraads vergelijkingen waar niet elke vergelijking een reële oplossing heeft.

2 Formules van Cardano

- De eerste stap is de vergelijking delen door a, dat toch verschilt van 0. We kunnen de bekomen vergelijking herschrijven als

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- De volgende stap is de coëfficiënt van x^2 doen verdwijnen. We doen dit via de substitutie $x = y - \frac{b}{3}$.

$$\begin{aligned} 0 =& x^3 + bx^2 + cx + d \\ =& (y^3 - by^2 + \frac{b^2}{3} - \frac{b^3}{27}) + b(y^2 - \frac{2b}{3}y + \frac{b^2}{9}) + c(y - \frac{b}{3}) + d \\ =& y^3 + (-\frac{b^2}{3} + c)y + (\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d) \end{aligned}$$

We kunnen dit herschrijven als

$$y^3 + py + q = 0$$

Deze vergelijking noemen we de *gereduceerde derdergraads vergelijking.* Als we de oplossingen y_1, y_2, y_3 van de gereduceerde vergelijking kunnen vinden, dan verkrijgen we de oplossingen van de originele vergelijking door bij elke y_i de waarde $-\frac{b}{3}$ op te tellen.

- Om de gereduceerde vergelijking op te lossen gebruiken we de substitutie $y = z - \frac{p}{3z}$.

  $$\begin{aligned} 0 =& y^3 + px + q \\ =& (z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3}) + p(z - \frac{p}{3z}) + q \\ =& z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q \end{aligned}$$

  Door te vermenigvuldigen met z^3 bekomen we dat de gereduceerde vergelijking equivalent is met

  $$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

  Deze vergelijking noemen we *de kubische resolvente van de gereduceerde vergelijking*. Dit is een bikwadratische vergelijking, die we gemakkelijk kunnen oplossen met de discriminant formule:

  $$z^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

  of

  $$\boxed{z = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}}$$

  Als we dit invullen bij $y = z - \frac{p}{3z}$, vinden we een oplossing van de gereduceerde vergelijking en door er $-\frac{b}{3}$ bij op te tellen, bekomen we een oplossing van de originele vergelijking.

- Er is toch wel opletten geblazen. Want wat gebeurt er, bijvoorbeeld, als in $y = z - \frac{p}{3z}$ de variabele $z = 0$? En wat gebeurt er als bepaalde coëfficiënten complexe getallen zijn? Het $\pm$ teken in de laatste formule geeft aan dat een complex getal twee vierkantswortels heeft. De oplossing voor z geeft slechts 1 van de drie derdemachts wortels uit het getal onder het wortelteken. De twee andere zijn dan gegeven door ωz en $\omega^2 z$, waarbij ω de primitieve derdemachts wortel uit 1 is, m.a.w. $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

- Veronderstel dat $p \neq 0$ en neem $z_1 = \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$. Dan is $z_1 \neq 0$ en is z_1 een oplossing van de kubische resolvente. Als we $z_2 = -\frac{p}{3z_1}$, dan is $y_1 = z_1 + z_2 = z_1 - \frac{p}{3z_1}$ een oplossing van de gereduceerde vergelijking.

- Wat weten we nu nog meer van z_2? Het is duidelijk dat $z_1^2.z_2^3 = -\frac{p^3}{27}$. Maar als we $z_1^3.\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$ uitrekenen bekomen we ook $-\frac{p^3}{27}$. Hieruit volgt dat $z_2 = \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$.

- We weten dus dat $y_1 = z_1 + z_2$ een oplossing is van de gereduceerde vergelijking en dat hun product gelijk is aan $-\frac{p}{3}$. Om de andere oplossingen van de gereduceerde vergelijking te vinden, merken we op dat hun product altijd gelijk moet zijn aan $-\frac{p}{3}$. Omdat $\omega z_1.\omega^2 z_2 = z_1 z_2 = -\frac{p}{3}$ zijn alle oplossingen van de gereduceerde vergelijking gegeven door:

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$y_1 = \omega\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$y_1 = \omega^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} + \omega\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

  Dit zijn de formules van Cardano voor de gereduceerde vergelijking.

3 Voorbeelden

1. Los op: $y^3 + 3y + 1 = 0$. Dus $p = 3$ en $q = 1$. Dan is $q^2 + \frac{4p^3}{27} = 5$ (we noemen dit de *discriminant* van de veelterm $y^3 + 3y + 1$) en kunnen we z_1 en z_2 berekenen: $z_1 = \sqrt[3]{-1+\sqrt{5}}$ en $z_1 = \sqrt[3]{-1-\sqrt{5}}$. Hun product is gelijk aan $-1 = -\frac{p}{3}$. Bijgevolg kunnen we z_1 en z_2 gebruiken om alle oplossingen van de gegeven vergelijking te bepalen.

$$y_1 = \sqrt[3]{-1+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{5}}$$

$$y_2 = \omega\sqrt[3]{-1+\sqrt{5}} + \omega^2\sqrt[3]{-1-\sqrt{5}}$$

$$y_3 = \omega^2 \sqrt[3]{-1+\sqrt{5}} + \omega \sqrt[3]{-1-\sqrt{5}}$$

Merk op dat y_1 reeël is en je kan gemakkelijk narekenen dat y_2 en y_3 complex toegevoegd zijn. Dit resultaat volgt uit de hoofdstelling van de algebra die ons vertelt dat bij een vergelijking met reële coëfficiënten, de oplossingen twee per twee complex toegevoegd zijn.

2. Los op: $y^3 - 3y = 0$. Door ontbinding, vinden we snel de drie reële oplossingen: $0, \pm\sqrt{3}$. Vinden we deze ook met de formules van Cardano? De discriminant van de veelterm $y^3 - 3y$ is -4 en $z_1 = \sqrt[3]{i}$. We kiezen als specifieke waarde voor z_1 de waarde $-i$ want $(-i)^3 = i$. Dan is $z_2 = -\frac{p}{z_1} = i$. De formules van Cardano geven dan als oplossingen:

$$y_1 = -i + i = 0$$

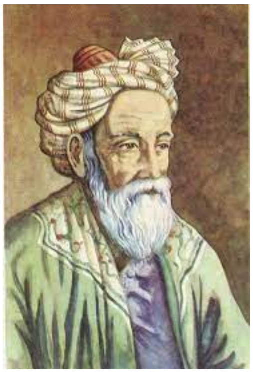
$$y_2 = \omega(-i) + \omega^2 i = \sqrt{3}$$

$$y_3 = \omega^2(-i) + \omega i = -\sqrt{3}$$

We vinden dus inderdaad dezelfde oplossingen.

4 Geschiedenis

De formule voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen is zeer oud. Ze dateert zich ongeveer in 1700 v.C. bij de Babyloniërs. De derdegraads vergelijkingen werden voor het eerst systematisch onderzocht door de Islamitische wiskundigen zoals bijvoorbeeld Omar Kayyam.



Het oplossen van derdegraads vergelijkingen werd populair in de Middeleeuwen. Zo werd Fibonacci door keizer Frederick 2 in 1225, gevraagd om de vergelijking $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ op te lossen. Zijn oplossing was

$$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6} + \cdots$$

De decimale waarde is $x = 1,368808107853\cdots$,welke nauwkeurig was op 10 cijfers!
Een cruciale rol speelde een wedstrijd om zo snel mogelijk derdegraads vergelijkingen op te lossen. In de 16de eeuw vond Scipio del Ferro een oplossing voor het oplossen van een vergelijking van de vorm $x^3 + bx = c$ met b en c positief. Zijn student Florido kende die oplossingsmethode en daagde, in 1535, Niccolo Fontana (ook gekend als Tartaglia) uit voor een wedstrijd om 30 derdegraads vergelijkingen op te lossen.

Tartaglia echter vond, in zijn voorbereiding op de wedstrijd, zelf ook een oplssingsmethode en deze was ook geldig voor andere waarden van b en c. Hij versloeg dan ook Florido. In 1539 vertelde Tartaglia zijn oplossingsmethode aan Girolamo Cardano.

Deze Cardano publiceerde dit in 1545 in zijn boek Ars Magna. In tegenstelling tot onze benadering, waarbij we 1 oplossing geven, beschouwde Cardano 13 afzonderlijke gevallen; Nadien hebben veel wiskundigen gepoogd om de oplossingen van Cardano te vereenvoudigen. Zo was er in 1550, Rafael Bombelli, die meer in detail de rol van complexe oplossingen onderzocht. In 1615 introduceerde F. Viète de substitutie $y = z + \frac{p}{3z}$, zoals wij ze gebruikt hebben.