1 Inleiding

In een vorig artikel hebben we geleerd de oplossingen te berekenen van $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$x_1 = -\frac{b}{3} + z_1 + z_2$$
$$x_2 = -\frac{b}{3} + \omega z_1 + \omega^2 z_2$$
$$x_3 = -\frac{b}{3} + \omega^2 z_1 + \omega_2^z$$

Hierbij zijn z_1 en z_2 oplossingen van de kubische resolvent $z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, gekozen zodat $z_1.z_2 = -\frac{p}{3}$. De bedoeling van dit hoofdstuk is wat meer te weten te komen over het verband tussen x_1, x_2, x_3 en z_1, z_2. We gaan het hebben over permutaties, discriminant en symmetrische veeltermen.

2 Permutaties

- We kunnen eerst proberen z_1 en z_2 uit te drukken in functie van x_1, x_2 en x_3. Vermenigvuldig hiervoor de tweede vergelijking hierboven met ω^2, de derde met ω en tel dan de drie vergelijkingen bij elkaar op. We krijgen: $x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = -\frac{b}{3}(1 + \omega + \omega^2) + 3z_1 + (1 + \omega + \omega^2)z_2$. Omdat $1 + \omega + \omega^2 = 0$ kunnen we hieruit z_1 oplossen:

$$z_1 = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

- Analoog vinden we dan:

$$z_2 = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$$

- De oplossingen van de kubische resolvent zijn $z_1, z_1, \omega z_1, \omega z_2, \omega^2 z_1$ en $\omega^2 z_2$.Als we ze allemaal schrijven in termen van x_1, x_1, x_3 krijgen we:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3) \\
z_2 &= \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_3 + \omega x_2) \\
\omega z_1 &= \frac{1}{3}(x_2 + \omega^2 x_3 + \omega x_1) \\
\omega z_2 &= \frac{1}{3}(x_3 + \omega^2 x_2 + \omega x_1) \\
\omega^2 z_1 &= \frac{1}{3}(x_3 + \omega^2 x_1 + \omega x_2) \\
\omega^2 z_2 &= \frac{1}{3}(x_2 + \omega^2 x_1 + \omega x_3)
\end{aligned}
$$

- Deze uitdrukkingen lijken erg op elkaar: de 6 wortels van de kubische resolvent woren bekomen uit z_1 door x_1, x_2, x_3 te *permuteren*. Hier komt de symmetrische groep S_3 op de proppen! Dit verklaart ook waarom de kubsiche resolvent graad 6 heeft want S_3 heeft orde 6.

3 De discriminant

- Bij de formules van Cardano, maakt men gebruik van de de grootheid $D = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Dan is $z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{D})}$ en $z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{D})}$.
- Proberen we nu D uit te drukken in functie van x_1, x_2 en x_3.
- $z_1^3 - z_3^3 = \sqrt{D}$. Maar je kan ook schrijven dat $z_1^3 - z_2^3 = (z_1 - z_2)(z_1 - \omega z_2)(z_1 - \omega^2 z_2)$. Door de formules uit vorig deel te gebruiken vinden we dat :

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3) - \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) \\
&= \frac{1}{3}(\omega^2 - \omega)(x_2 - x_3) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{3}}(x_2 - x_3)
\end{aligned}
$$

- Analoog kan men schrijven dat $z_1 - \omega z_2 = \frac{i\omega^2}{\sqrt{3}}(x_1 - x_3)$ en $z_1 - \omega^2 z_2 = -\frac{i\omega}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2)$.

- Alles gecombineerd geeft dit:

$$\sqrt{D} = -\frac{i}{3\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

- Gekwadrateerd:

$$q^2 - \frac{4p^3}{27} = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

- Meestal definieert men de discriminant van $x^3 + bx^2 + cx + d$ als

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

  De discriminant is het product van de kwadraten van de verschillen van de wortels van de gegeven vergelijking.

- Dan kan men z_1 en z_2 schrijven als

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\Big(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\Big)}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\Big(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\Big)}$$

- Het begrip discriminant kennen we van bij de tweedegraadsvergelijkingen. Neem $x^2 - bx + c = 0$. Dan is de discriminant $\Delta = b^2 - 4c = (x_1 - x_2)^2$. Dus ook hier is de discriminant de som van de kwadraten van het verschil van twee wortels.

4 Symmetrische veeltermen

- $\sqrt{D} = -\frac{i}{3\sqrt{3}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$. Als we x_1, x_2 en x_3 in deze formule permuteren, dan verandert de formule niet. We zeggen dat Δ *invariant is voor permutaties van de wortels* of dat Δ symmetrisch is in de wortels.

- We kunnen Δ uitdrukken in functie van b,c en d. We weten immers dat $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ en dat $p = -\frac{b^2}{3} + c$ en $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$. Uitrekening geeft:

$$\Delta = b^2c^2 + 18bcd - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2$$

- Ook hier zien we de symmetrie met $x^2 + bx + c = 0$, waar $\Delta = b^2 - 4c$.
- Er bestaat een algemene stelling die zegt dat elke symmetrische uitdrukking in x_1, x_2, x_3 steeds kan worden uitgedrukt in functie van b,c en d. Hierbij zijn x_1, x_2 en x_3 de wortels van de vergelijking $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Omgekeerd geldt ook dat $x^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Door beide leden uit te werken, vinden we dat :

$$\begin{aligned} b &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\ c &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ d &= -x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

- De coëfficiënten van de derdegraads vergelijking kunnen geschreven worden als symmetrische functies van haar wortels. De veeltermen b,c en d noemt men de *elementaire symmetrische veeltermen in* x_1, x_2, x_3.