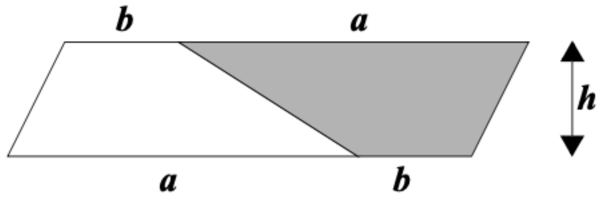
Gemiddelden

0.1 Inleiding

In deze tekst gaan we het hebben over een trapezium en tussenparallellen daarin. Een tussenparallel is een lijnstuk dat evenwijdig loopt met het paar evenwijdige zijden van een trapezium. We gaan het verband leggen tussen de verschillende gemiddelden en sommige tussenparallellen. We bespreken het rekenkundig gemiddelde (RG), het meetkundig gemiddelde (MG), het harmonisch gemiddelde (HG) en het kwadratisch gemiddelde (KG). We vermelden eerst de formule voor de oppervlakte van een trapezium. Deze formule was 4000 jaar geleden al bekend in Egypte en Mesopotamië. Je kan de formule afleiden uit de oppervlakteformule voor parallellogram .

$$O = \frac{1}{2}h(a+b)$$



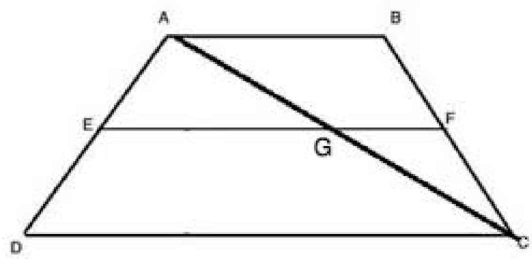
0.2 Het rekenkundig gemiddelde

Het rekenkundig gemiddelde van twee getallen a en b is gedefinieerd als

$$RG = \frac{1}{2}(a+b)$$

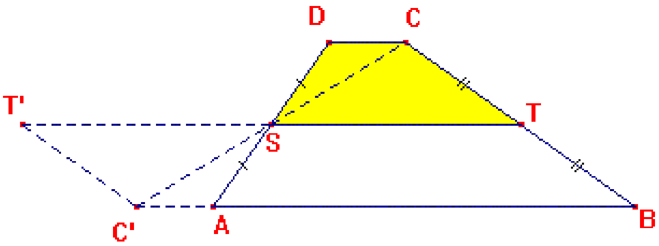
Construeer de parallel door het midden van de opstaande zijden. We noemen dit de *middenparallel* van het trapezium. De lengte van deze middenparallel is het rekenkundig gemiddelde van de lengtes van de evenwijdige zijden van het trapezium. Er zijn verschillende manier om dit te bewijzen:

- Door meetkundige eigenschappen te gebruiken.

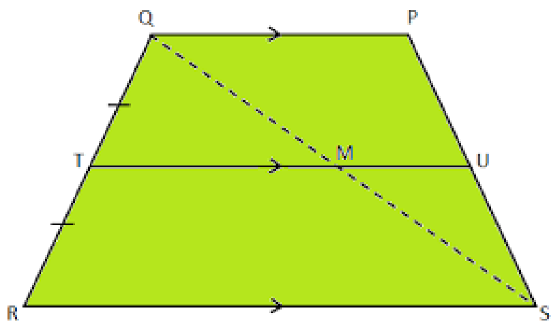


$|EG| = \frac{1}{2}|DC|$, als middenparallel in driehoek ACD. Analoog is $|GF| = \frac{1}{2}|AB|$ als middenparallel in driehoek ABC. Bijgevolg is $|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|$.

- Visueel.



- Met vectoren.



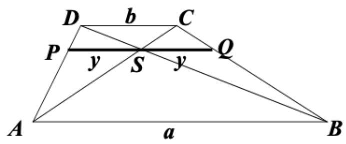
$$\begin{aligned}\overrightarrow{TU} =& \vec{U} - \vec{T}\\ =& \frac{1}{2}(\vec{P} + \vec{S}) - \frac{1}{2}(\vec{Q} + \vec{R})\\ =& \frac{1}{2}(\vec{P} - \vec{Q}) + \frac{1}{2}(\vec{S} - \vec{R})\\ =& \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RS})\end{aligned}$$

0.3 Het harmonisch gemiddelde

Het harmonisch gemiddelde van twee getallen a en b is gedefinieerd als

$$\frac{1}{HG} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$

Hieruit volgt dat $HG = \frac{2ab}{a+b}$. Construeer de parallel door het snijpunt van de diagonalen. De lengte van deze parallel is het harmonisch gemiddelde van a en b. De parallel noemt men de *diagonalenparallel*.



De driehoeken ADB DBS zijn gelijkvormig, dus geldt

$$\begin{aligned}\frac{a}{y} &= \frac{|DB|}{|DS|}\\ &= \frac{|DS|+|BS|}{|DS|}\\ &= 1+\frac{a}{b}\end{aligned}$$

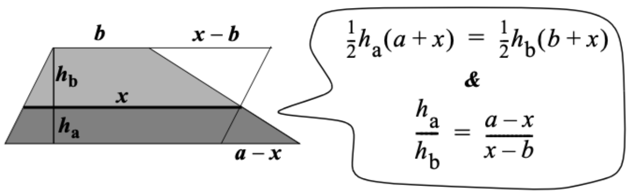
De laatste stap is te verklaren door de gelijkvormigheid van de driehoeken DSC en ABS. Stel nu $x = 2y$ dan is $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ en hiermee is het gestelde bewezen.
Het begrip harmonisch gemiddelde is oeroud en speelde bijvoorbeeld een rol in de Pythagorese muziekleer, dat verklaart tevens de naam. Een andere toepassing ligt in de verkeerskunde. De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/u en de terugreis met 120 km/u, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/u.

0.4 Het kwadratisch gemiddelde

Het kwadratisch gemiddelde van twee getallen a en b is gedefinieerd als

$$KG^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Construeer de parallel die het trapezium verdeelt in twee delen met gelijke oppervlakte. De lengte van deze parallel is het kwadratisch gemiddelde van a en b. De parallel noemt men de *oppervlakteparallel*.



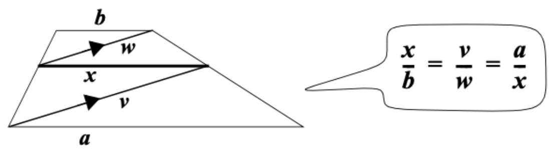
Invullen geeft inderdaad $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Het kwadratisch gemiddelde vindt onder meer toepassing in de statistiek.

0.5 Het meetkundig gemiddelde

Het meetkundig gemiddelde van twee getallen a en b is gedefinieerd als

$$\frac{MG}{b} = \frac{a}{MG}$$

of $MG^2 = ab$. De tussenparallel van een trapezium heeft die lengte als en slechts als de lijnen die de eindpunten van de tussenparallel verbinden met twee overstaande hoekpunten, evenwijdig zijn. Dat valt gemakkelijk te bewijzen met gelijkvormige driehoeken. De parallel noemt men de *meetkundeparallel*.



0.6 Verbanden

De middenparallel verdeelt de opstaande zijden in gelijke stukken. De diagonalenparallel verdeelt de diagonalen en dus ook de opstaande zijden in stukken die zich verhouden als b en a. De meetkundeparallel verdeelt ten slotte de opstaande zijden in stukken die zich verhouden als b en $\sqrt{ab}$ ofwel als $\sqrt{b}$ en $\sqrt{a}$. Veronderstellen we dat b de kleinste van de evenwijdige zijden is, dan is $\frac{b}{a} < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} < 1$ en dus is $HG < MG < RG$ Verder is duidelijk dat het kwadratisch gemiddelde nog groter is, zodat

$$HG < MG < RG < KG$$